This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641506 2

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LA DECOMPOSITION DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR

A. L. CRELLE.

(Extrait du „*Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle*" tome IX. cah. 3. et tome X. cah. 1.)

PASTOR LIBRARY
NEW-YORK

1832.

Digitized by Google

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Digitized by Google

Mémoire sur la décomposition des fractions algébriques rationnelles.

Note préliminaire.

On présente ordinairement dans les cours d'analyse la décomposition des fractions algébriques rationnelles, comme une opération auxiliaire dont on a besoin dans l'intégration des formules différentielles fractionnaires rationnelles. Comme dans cette intégration, les dénominateurs des fractions partielles ne passent pas ordinairement le second degré, on suit pour la décomposition des fractions, presque dans tous les traités, la méthode qu'Euler a donnée en 1780, et qui est assez praticable dans ces cas. Mais, outre que cette méthode n'est pas toujours la plus expéditive, parceque déjà dans le cas des dénominateurs partiels du *second* degré, si leurs facteurs simples sont imaginaires, on est impliqué dans le calcul des imaginaires, ce qui est incommode, elle est de plus sujette à l'imperfection de passer par la voie des imaginaires des quantités réelles à des résultats également réels. Et si les dénominateurs partiels passent le *second* degré, cette méthode est presque impraticable. A cela vient qu'on néglige de démontrer rigoureusement l'admissibilité de la *forme* de la décomposition. Ou on la *suppose* seulement, et alors elle n'est que vérifiée à posteriori, dans chaque cas particulier; ou bien on la démontre par le *nombre* des coefficiens indéterminés qui entrent en calcul, et cette démonstration n'est pas exempte de doutes.

Euler a donné dans les Mémoires de Petersbourg, tom. I., 1809, une autre méthode de décomposition des fractions algébriques, laquelle a pour but, d'éviter les calculs des imaginaires, et de passer directement des données réelles aux résultats réels. Cette méthode, remarquable en soi par la nouveauté des réflexions et par les traits de génie que l'immortel Euler déploie en cette occasion comme dans tant d'autres, ne semble pas être encore entrée dans les cours d'analyse et dans l'instruction, quoiqu'elle y pût être essentiellement utile. Elle offre déjà un perfectionne-

Digitized by Google

ment considérable du calcul des fractions partielles, parcequ'elle évite effectivement les imaginaires dans *tous* les cas des données réelles. Mais elle n'est pas encore la plus expéditive, ni la plus simple, et elle manque également de la démonstration rigoureuse de la *forme* de décomposition.

Enfin la décomposition des fractions algébriques en général n'est pas attachée de nécessité à l'intégration des différentielles fractionnaires rationnelles. Elle est une opération algébrique indépendante de cette application, et ne doit pas se borner aux besoins actuels de l'intégration.

Elle est donc généralement encore assez imparfaite dans son état actuel, et il ne sera pas inutile de traiter cet objet un peu plus à fond. C'est ce que nous voulons essayer dans ce mémoire.

Nous commencerons par la démonstration de la *forme* de la décomposition, et ensuite nous procéderons aux différentes méthodes *de trouver les numérateurs des fractions partielles* dans les différens cas. Mais pour mieux confronter les différentes méthodes, il faudra que nous touchions rapidement aussi les méthodes usitées plus généralement; et comme la *pratique* du calcul est ici ce dont il s'agit principalement, nous appliquerons les divers procédés à des exemples en nombres.

Introduction.

1.

Si U, y, N désignent des polynomes rationnels, contenant diverses puissances de x à exposans entiers, et que, dans les cas où *le degré* du polynome entre en calcul, on marque à côté des signes des polynomes, le *plus haut exposant de* x, de sorte que par exemple

$$1. \quad {}^{m}U = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_3 x^2 + \varepsilon_4 x^3 \ldots + \varepsilon_{m+1} x^m,$$

où les coefficiens ε ne contiennent pas x: *toute* fraction algébrique rationnelle $\frac{{}^{m}U}{{}^{n}V}$ peut être exprimée par

$$2. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N},$$

où m, n, r, ϱ et s sont des nombres *entiers* et où l'on peut toujours supposer

$$3. \quad m < n, \text{ c'est à dire } m < r\varrho + s.$$

Digitized by Google

Car en premier lieu ^{s}N peut de nouveau être supposé de la forme de V, c'est à dire de la forme $^{r_1}y_1^{\varrho_1} \cdot {}^{s_1}N_1$; $^{s_1}N_1$ peut encore être supposé de la forme $^{r_2}y_2^{\varrho_2} \cdot {}^{s_2}N_2$ etc. et enfin $^{s_{k-1}}N_{k-1}$ sera de la forme $^{s_k}y_k$, de sorte que

$$4. \quad \frac{^{m}U}{^{n}V} = \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N} = \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{r_1}y_1^{\varrho_1} \cdot {}^{s_1}N_1} = \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{r_1}y_1^{\varrho_1} \cdot {}^{r_2}y_2^{\varrho_2} \cdot {}^{s_2}N_2} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots = \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{r_1}y_1^{\varrho_1} \cdot {}^{r_2}y_2^{\varrho_2} \cdots {}^{r_k}y^{\varrho_n}},$$

où la dernière expression de $\frac{^{m}U}{^{n}V}$ embrasse visiblement tous les cas possibles. En second lieu $n = r\varrho + s$ peut toujours être supposé plus grand que m. Car si n étoit égal à m, ou plus petit que m, on pourroit *diviser* U par V. Par cela la fraction se trouveroit décomposée en deux parties, l'une *entière* et l'autre *fractionnaire*. Le *reste* de la division seroit le numérateur de la partie fractionnaire, de laquelle il s'agit seulement; et puisque le *reste* d'une division est nécessairement d'un degré moins élevée que le dividende, au moins d'une unité, cette partie fractionnaire, qui vient seule en considération, se trouvera dans le cas supposé de $\frac{U}{V}$.

2.

Tout résultat de décomposition d'une fraction algébrique quelconque peut être représenté sous la forme

$$5. \quad \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N} = \frac{^{r-1}w_1}{^{r}y^{\varrho}} + \frac{^{n-r-1}Z_1}{^{r}y^{r-1} \cdot {}^{s}N}.$$

La partie détachée $\frac{Z}{y^{\varrho-1}N}$ est de nouveau de la forme de la fraction donnée $\frac{U}{y^{\varrho}N}$, de sorte qu'on peut supposer

$$6. \quad \frac{^{n-r-1}Z_1}{^{r}y^{\varrho-1} \cdot {}^{s}N} = \frac{^{r-1}w_2}{^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{^{n-2r-1}Z_2}{^{r}y^{\varrho-2} \cdot {}^{s}N},$$

Ici la fraction $\frac{Z_2}{y^{\varrho-2}N}$ est encore de la forme de la fraction donnée; donc on peut supposer

$$7. \quad \frac{^{n-2r-1}Z_2}{^{r}y^{\varrho-2} \cdot {}^{s}N} = \frac{^{r-1}w_3}{^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{^{n-3r-1}Z_3}{^{r}y^{\varrho-3} \cdot {}^{s}N}$$

etc. En continuant la décomposition de cette manière et en substituant on trouve

$$8. \quad \frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N} = \frac{^{r-1}w_1}{^{r}y^{\varrho}} + \frac{^{r-1}w_2}{^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{^{r-1}w_3}{^{r}y^{\varrho-2}} \cdots\cdots + \frac{^{r-1}w_\varrho}{^{r}y} + \frac{^{s-1}Z_\varrho}{^{s}N},$$

et par là la décomposition est finie, quant au facteur $^{r}y^{\varrho}$ du dénominateur

Digitized by Google

de la fonction donnée. On peut maintenant continuer l'opération pour un autre facteur ${}^{r_1}y^{\varrho_1}_1$ contenu dans ${}^{s}N$ et épuiser de cette sorte successivement tous les facteurs de N. Cela étant fait, la fonction proposée $\frac{U}{V}$ sera décomposée en une série de fractions de la forme $\frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\mu}}$, qui est celle dont on a besoin ordinairement.

Les problèmes qui se présentent dans la décomposition des fractions algébriques rationnelles se réduisent donc aux deux suivants:

I. Démontrer que la *forme* générale de décomposition représentée par la formule (5.) a lieu dans tous les cas.

II. Trouver les *numérateurs* w et Z des fractions partielles, leurs dénominateurs y^{ϱ} et $y^{\varrho-1}N$ étant donnés.

Nous commencerons par le premier problème.

Section première.

De la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles.

3.

En supposant l'expression (5.) on donne ordinairement *des coefficiens indéterminés* aux numérateurs w et Z des deux fractions partielles. Ces coefficiens trouvés, la décomposition sera effectuée. Dans le cas où l'on a attention à *démontrer* la *forme supposée* de la décomposition (ce qu'on ne fait pas toujours), on tire comme suit du *nombre* des coefficiens indéterminés la justification de cette forme.

En multipliant l'expression (5.) par ${}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N$ elle donne

$$9. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w.{}^{s}N + {}^{r}y.{}^{n-r-1}Z.$$

Ici le degré du produit ${}^{r-1}w.{}^{s}N$ est $s+r-1$, celui du produit ${}^{r}y.{}^{n-r-1}Z$ est $r+n-r-1=n-1$. Le dernier l'emporte sur le premier, ou lui est tout au plus égal, puisque $s+r$ est plus petit que n si $\varrho>1$, et égal à n si $\varrho=1$. Donc le plus haut degré auquel s'élève x à droite dans (9.) est $n-1$. Donc l'équation (9.) offre n équations pour servir à la détermination des coefficiens indéterminés qu'elle renferme. Il n'y a pas d'exception dans les cas où m est plus petit que $n-1$. Dans ces cas quelques unes des n équations qu'offre celle (9.) ont *zéro* à l'un de leurs deux côtés. Maintenant les polynomes w et Z, qui sont les seuls dans (9.) renfermant des coefficiens *indéterminés*, en contiennent re-

Digitized by Google

spectivement r et $n-r$; c'est à dire: le nombre total des coefficiens indéterminés renfermés dans (9.) est $r+n-r=n$. Ce nombre est égal à celui des équations *déterminantes*. Donc le nombre de ces équations est généralement suffisant pour donner la valeur des coefficiens indéterminés, et de là on conclut ordinairement que ces coefficiens peuvent toujours être trouvés de l'équation supposée et que par suite la *forme* de cette équation est toujours admissible.

Mais il se pourroit bien que parmi les équations déterminantes il s'en trouvât *d'identiques*. Ci cela étoit, ces équations identiques ne contribueroient pas à la détermination des inconnues; donc, dans ce cas, les coefficiens indéterminés ne pourroient être trouvés *tous*, et par conséquent la forme supposée ne seroit pas admissible. Il s'agit donc encore de démontrer que toutes les n équations déterminantes sont nécessairement toujours *non-identiques* et c'est cette partie de la justification de la forme supposée qu'on néglige ordinairement.

Mr. Dirksen, en remarquant la nécessité de démontrer la non-identicité des équations déterminantes, a donné cette démonstration, en supposant dans (5.) $r=1$, cas duquel on peut partir, puis'quon peut supposer ${}^r\gamma$ décomposé dans ses r facteurs simples. Nous ne reproduirons pas cette démonstration parcequ'on peut la voir dans ce journal même, tom. I. cah. 1. page 55. etc.

Nous passons à une autre

Demonstration de la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles, donnée par Mr. Cauchy.

4.

Cette démonstration se trouve dans le Cours d'analyse de l'auteur, tom. I. chap. XI. Nous le reproduirons ici sous une forme un peu variée, pour compléter nos recherches. Elle revient à ce qui suit.

I. Supposons

$$10. \quad {}^r\gamma = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r),$$

de sorte que $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ sont les r racines de l'équation

$$11. \quad {}^r\gamma = 0.$$

II. Cela posé, désignons par u_1 un polynome de dégré $r-1$, encore inconnu mais composé des puissances de x à exposans entiers et

Digitized by Google

de la fonction donnée. On peut maintenant continuer l'opération pour un autre facteur ${}^{r_1}y^{\varrho_1}_1$ contenu dans ${}^{s}N$ et épuiser de cette sorte successivement tous les facteurs de N. Cela étant fait, la fonction proposée $\frac{U}{V}$ sera décomposée en une série de fractions de la forme $\frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\mu}}$, qui est celle dont on a besoin ordinairement.

Les problèmes qui se présentent dans la décomposition des fractions algébriques rationnelles se réduisent donc aux deux suivants:

I. Démontrer que la *forme* générale de décomposition représentée par la formule (5.) a lieu dans tous les cas.

II. Trouver les *numérateurs* w et Z des fractions partielles, leurs dénominateurs y^{ϱ} et $y^{\varrho-1}N$ étant donnés.

Nous commencerons par le premier problème.

Section première.

De la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles.

3.

En supposant l'expression (5.) on donne ordinairement *des coefficiens indéterminés* aux numérateurs w et Z des deux fractions partielles. Ces coefficiens trouvés, la décomposition sera effectuée. Dans le cas où l'on a attention à *démontrer* la *forme supposée* de la décomposition (ce qu'on ne fait pas toujours), on tire comme suit du *nombre* des coefficiens indéterminés la justification de cette forme.

En multipliant l'expression (5.) par ${}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N$ elle donne

$$9. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w.{}^{s}N + {}^{r}y.{}^{n-r-1}Z.$$

Ici le degré du produit ${}^{r-1}w.{}^{s}N$ est $s+r-1$, celui du produit ${}^{r}y.{}^{n-r-1}Z$ est $r+n-r-1=n-1$. Le dernier l'emporte sur le premier, ou lui est tout au plus égal, puisque $s+r$ est plus petit que n si $\varrho>1$, et égal à n si $\varrho=1$. Donc le plus haut degré auquel s'élève x à droite dans (9.) est $n-1$. Donc l'équation (9.) offre n équations pour servir à la détermination des coefficiens indéterminés qu'elle renferme. Il n'y a pas d'exception dans les cas où m est plus petit que $n-1$. Dans ces cas quelques unes des n équations qu'offre celle (9.) ont *zéro* à l'un de leurs deux côtés. Maintenant les polynomes w et Z, qui sont les seuls dans (9.) renfermant des coefficiens *indéterminés*, en contiennent re-

Digitized by Google

spectivement r et $n-r$; c'est à dire: le nombre total des coefficiens indéterminés renfermés dans (9.) est $r+n-r=n$. Ce nombre est égal à celui des équations *déterminantes*. Donc le nombre de ces équations est généralement suffisant pour donner la valeur des coefficiens indéterminés, et de là on conclut ordinairement que ces coefficiens peuvent toujours être trouvés de l'équation supposée et que par suite la *forme* de cette équation est toujours admissible.

Mais il se pourroit bien que parmi les équations déterminantes il s'en trouvât *d'identiques*. Ci cela étoit, ces équations identiques ne contribueroient pas à la détermination des inconnues; donc, dans ce cas, les coefficiens indéterminés ne pourroient être trouvés *tous*, et par conséquent la forme supposée ne seroit pas admissible. Il s'agit donc encore de démontrer que toutes les n équations déterminantes sont nécessairement toujours *non-identiques* et c'est cette partie de la justification de la forme supposée qu'on néglige ordinairement.

Mr. Dirksen, en remarquant la nécessité de démontrer la non-identicité des équations déterminantes, a donné cette démonstration, en supposant dans (5.) $r=1$, cas duquel on peut partir, puis'quon peut supposer ${}^{r}y$ décomposé dans ses r facteurs simples. Nous ne reproduirons pas cette démonstration parcequ'on peut la voir dans ce journal même, tom. I. cah. 1. page 55. etc.

Nous passons à une autre

Demonstration de la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles, donnée par Mr. Cauchy.

4.

Cette démonstration se trouve dans le Cours d'analyse de l'auteur, tom. I. chap. XI. Nous le reproduirons ici sous une forme un peu variée, pour compléter nos recherches. Elle revient à ce qui suit.

I. Supposons

$$10. \quad {}^{r}y = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r),$$

de sorte que $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ sont les r racines de l'équation

$$11. \quad {}^{r}y = 0.$$

II. Cela posé, désignons par u_1 un polynome de dégré $r-1$, encore inconnu mais composé des puissances de x à exposans entiers et

Digitized by Google

ayant les deux propriétés suivantes, savoir: *d'être zéro pour toutes les valeurs* $x_2, x_3, \ldots x_r$ *de* x *et égal à* 1 *pour la valeur* x_1 *de* x.

Il est clair d'abord que ce polynome doit être divisible par tous les facteurs $x-x_2$, $x-x_3$, $\ldots$ $x-x_r$, c'est à dire de la forme

$$12. \quad u_0 = C(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r),$$

où le facteur C ne contient plus x. Car si, par ex., u_0 n'étoit pas divisible par $x-x_2$ mais au contraire $u_0=(x-x_2)q+R$, où R n'a pas $x-x_2$ pour facteur, on auroit, en mettant $x=x_2$, $u_0=R$ et non pas zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il faut dans d'abord que u_1 soit $=(x-x_2)q_1$; et puisque u_0 doit être zéro également pour $x=x_3$ il faut que q_1 le soit aussi, c'est à dire que q_1 soit $=(x-x_3)q_2$, et par une raison semblable, $q_2=(x-x_2)q_3$ etc. En substituant on trouve

$$u_1 = (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots(x-x_{r+1})q_{r-1}.$$

Mais le dernier facteur q_{r-1} ne peut renfermer x, parceque u_0 ne doit être que du degré $r-1$. Donc enfin u_0 aura la forme (12.). Il ne peut non plus avoir quelque autre forme rationnelle, et on ne peut pas supposer par ex. $u_1=(x-x_2)^\mu q_1$, où $\mu>1$, puisque dans ce cas u_1 ne pourrait être du degré $r-1$ *seulement*, et divisible par *tous* les facteurs $x-x_2$, $x-x_3$, $\ldots$ $x-x_r$ en même tems.

III. Pour satisfaire à la seconde condition supposée pour u_0, d'être $=1$ pour $x=x_1$, il faut que

$$13. \quad u_1 = 1 = C(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_r).$$

Cela donne

$$14. \quad C = \frac{1}{(x_1-x_2)(x-x_3)\ldots(x_1-x_r)},$$

Donc, en substituant dans (12.), on trouve

$$15. \quad u_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_r)}.$$

Ce polynome rationnel et *entier* de x (car le dénominateur de (15.) ne contient pas x) a donc les proprietés prescrites: d'être zéro pour $x=x_2, x_3, \ldots x_r$ et 1 pour $x=x_1$. Il est du degré $r-1$.

IV. On trouvera également d'autres polynomes rationnels et entiers $u_2, u_3, \ldots u_{r-1}$ de degré $r-1$ qui soient $=1$ respectivement pour $x=x_2, x_3, \ldots$ et zéro pour toutes les autres valeurs que peut avoir x. Ils sont

Digitized by Google

$$16.\quad \begin{cases} u_2 = \dfrac{(x-x_1)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\,\ldots\,(x-x_r)}{(x_2-x_1)(x_2-x_4)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_r)}, \\ u_3 = \dfrac{(x-x_1)\,(x-x_1)\,(x-x_4)\,\ldots\,(x-x_r)}{(x_3-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_4)\ldots(x_3-x_r)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_r = \dfrac{(x-x_1)\,(x-x_2)\,\ldots\ldots\,(x-x_{r-1})}{(x_r-x_1)\,(x_r-x_2)\,\ldots\ldots\,(x_r-x_{r-1})}. \end{cases}$$

V. Si donc on fait

$$17.\quad u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 \ldots + A_r u_r,$$

où les quantités *arbitraires* $A_1, A_2, A_3, \ldots A_r$ ne renferment pas x, la lettre u représentera un polynome rationnel et entier de degré $r-1$ qui a la propriété d'être $= A_1$ pour $x = x_1$, $= A_2$ pour $x = x_2$ etc. et enfin $= A_r$ pour $x = x_r$. Car, comme on voit par les expressions (15. et 16.), on a $u_1 = 1$ si l'on fait $x = x_1$, et en même tems $u_2, u_3, \ldots \ldots u_r = 0$. Si l'on fait $x = x_2$ on a $u_2 = 1$ et en même tems $u_1, u_2, u_4, \ldots u_r = 0$ etc.

On voit aussi, par l'analyse qui précède, qu'il n'existe pas d'autre polynome rationnel et entier *de degré* $r-1$ qui donne A_1 pour $x = x_1$, A_2 pour $x = x_2$ etc.

VI. Cela posé, soit à décomposer la fraction

$$18.\quad \frac{U}{y^e . N}.$$

Désignons les valeurs indépendantes de x, que prend la fonction $\frac{U}{N}$ si l'on y donne successivement à x les valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots x_r$, racines de l'équation $y = 0$ (10.), par

$$19.\quad \frac{{}_1U}{{}_1N} = A_1,\quad \frac{{}_2U}{{}_2N} = A_2,\quad \ldots\ldots\quad \frac{{}_rU}{{}_rN} = A_r;$$

nous avons vu ci-dessus qu'il existe toujours un polynome

$$u = A_1 u_1 + A_2 u_2 \ldots + A_r u_r,$$

c'est à dire le polynome

$$20.\quad u = \frac{{}_1U}{{}_1N} u_1 + \frac{{}_2U}{{}_2N} u_2 + \frac{{}_3U}{{}_3N} u_3 \ldots + \frac{{}_rU}{{}_rN} u_r$$

de degré $r-1$ dont les valeurs sont respectivement

$$\frac{{}_1U}{{}_1N}, \frac{{}_2U}{{}_2N}, \ldots \frac{{}_rU}{{}_rN} \text{ pour } x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_r.$$

Donc, si l'on pose la quantité

$$21.\quad U - uN,$$

Digitized by Google

cette quantité sera zéro pour les différentes valeurs x_1, x_2, x_3, ... x_r, de x. Car en mettant par ex. $x = x_1$, U et N se reduiront à ${}_1U$ et ${}_1N$ et u à u_1, donc $U - uN$ à ${}_1U - \frac{{}_1U}{{}_1N} N_1 = {}_1U - {}_1U = 0$. Si l'on fait $x = x_2$ U et N se réduiront à ${}_2U$ et ${}_2N$ et u à u_2, donc $U - uN$ à ${}_2U - \frac{{}_2U}{{}_2N} {}_2N_2 = {}_2U - {}_2U = 0$ etc.

VII. Mais puisque la quantité $U - uN$ est zéro pour toutes les valeurs x_1, x_2, ... x_r de x, il faut qu'elle soit divisible par $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$, ... $x - x_r$ en même tems, par une raison semblable à celle dans le cas ci-dessus de u_o (II.). On peut donc supposer:

22. ${}^mU - {}^{r-1}u\,{}^sN = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r)\,{}^{n-1}T = {}^ry\,{}^{n-r-1}T$ (10).

Le facteur T doit être supposé être un polynome du degré $n-r-1$, puisque la plus grande valeur de m est $n-1 > s+r-1$.

VIII. Si l'on divise (22.) par ${}^ry^\varrho\,{}^sN$, on trouve

$$\frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho\,{}^sN} - \frac{{}^{r-1}u}{{}^ry^\varrho} = \frac{{}^{n-r-1}T}{{}^ry^{\varrho-1}\,{}^sN}$$

ou bien

$$23. \quad \frac{{}^mU}{{}^ry^\varrho\,{}^sN} = \frac{{}^{r-1}u}{{}^ry^\varrho} + \frac{{}^{n-r-1}T}{{}^ry^{\varrho-1}\,{}^sN}.$$

C'est donc l'expression décomposée à laquelle peut être réduite la fraction $\frac{U}{y^\varrho N}$. On voit que sa forme s'accorde parfaitement avec celle (5.). Les quantités u et T dans (23.) sont les mêmes qu'on a désignées par w et Z dans (5.). La forme supposée (5.) pour la décomposition des fractions se trouve donc justifiée.

IX. Cette démonstration est sans doute bien rigoureuse *si l'on fixe d'abord la forme des dénominateurs des deux fractions partielles.*

Mais sans cela il y a une difficulté. Car dans (VII.) on trouve que la quantité $U - uN$ est nécessairement divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r) = {}^ry,$$

parcequ'elle est $= 0$ pour $x = x_1$, $x = x_2$, ... $x = x_r$. Mais *par cette seule raison* elle pourroit bien être également divisible par ${}^ry^2$, ${}^ry^3$ etc. et même par un produit comme $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_r)^{m_r}$, où les exposans des facteurs simples sont inégaux. Et si par ex. on avait

$$24. \quad {}^mU - {}^{r-1}u\,{}^sN = {}^ry^m\,{}^{n-rm-1}T,$$

cela, en divisant par ${}^ry^\varrho\,{}^sN$, donnerait

Digitized by Google

$$25. \quad \frac{{}^{m}U}{{}_{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}u}{{}_{r}y^{r}} + \frac{{}^{n-rm-1}T}{{}_{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N},$$

où u a encore *la même* valeur que ci-dessus. Il est vrai qu'une expression de la forme (25.) peut avoir lieu effectivement. Elle se présente si dans (8.) on réunit en un seul les m premiers termes à droite et *tous* les autres termes dans la seconde fraction partielle. Mais alors le numérateur u de la première fraction partielle n'est plus le même qu'auparavant. Il est alors du degré $mr-1$ et non du degré $r-1$. Pour faire voir qu'une même valeur de u, celle (20.), ne peut convenir également aux deux expressions (23. et 25.), il paroît que les coefficiens indéterminés doivent être appelés comme secours.

Autre démonstration à la *forme* de décomposition des fractions algébriques rationnelles.

5.

La démonstration suivante est, comme on verra, purement élémentaire et exempte de doutes. Elle ne repose que sur la division ordinaire des polynomes.

I. Supposons en premier lieu que dans l'expression générale $\frac{{}^{m}U}{{}_{r}y^{\varrho}.{}^{s}N}$ des fractions qui peuvent se présenter à être décomposées, l'exposant ϱ de y soit $=1$, de sorte que la fraction à décomposer soit

$$26. \quad \frac{{}^{m}U}{{}_{r}y.{}^{s}N} = \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V}, \quad \text{où} \quad n = s + r$$

et où y ne contient que des facteurs *inégaux;* et soient, comme ci-dessus (10.), $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$ les r facteurs *inégaux* de y, de sorte que

$$27. \quad y = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r);$$

on suppose que ni U ni N ne soit divisible par aucun des facteurs $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$. Mais la quantité V sera divisible par tous les facteurs $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_r$. Si on la divise par $x-x_1$, le quotient sera du degré $n-1$; si l'on divise ce quotient par $x-x_2$, le nouveau quotient sera de degré $n-2$ etc. jusqu'au r^{me} quotient qui sera ${}^{s}N$. On pourra donc écrire

$$28. \quad \begin{cases} {}^{n}V = (x-x_1)\,{}^{n-1}V_1 \\ {}^{n-1}V_1 = (x-x_2)\,{}^{n-2}V_2 \\ {}^{n-2}V_2 = (x-x_3)\,{}^{n-3}V_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}^{n-r+1}V_{r-1} = (x-x_r)\,{}^{s}N \end{cases}$$

Digitized by Google

où la quantité V_1 n'est plus divisible par $x-x_1$, celle V_2 ne l'est pas par $x-x_1$ et $x-x_2$ etc.

II. Cela posé, divisons ${}^{m}U$ et ${}^{n-1}V_1$ par $x-x_1$. Puisque les deux quantités ne sont pas divisibles par $x-x_1$, il y aura nécessairement un *reste* de chaque division et les deux restes seront des quantités A et B *indépendantes de* x ou du degré zéro, car le reste d'une division est toujours d'un degré *moindre* que le diviseur, au moins d'une unité; le diviseur est ici du degré 1, donc le reste, qui d'ailleurs existe *nécessairement*, ne peut être que du degré 0, c'est à dire indépendant de x.

On peut donc supposer

$$29. \quad {}^{m}U = {}^{m-1}P(x-x_1) + {}^{0}A \quad \text{et}$$

$$30. \quad {}^{n-1}V_1 = {}^{n-1}Q(x-x_1) + {}^{0}B.$$

Multipliant l'équation (30.) par

$$51. \quad \frac{{}^{0}A}{{}^{0}B} = {}^{0}\lambda_1$$

il vient

$$32. \quad {}^{0}\lambda_1 . {}^{n-1}V_1 = {}^{0}\lambda_1 . {}^{n-2}Q(x-x_1) + {}^{0}A.$$

Soustrayant (32.) de (29.) on aura

$$33. \quad {}^{m}U - {}^{n-1}V_1 . {}^{0}\lambda_1 = ({}^{m-1}P - {}^{0}\lambda_1 . {}^{n-2}Q)(x-x_1).$$

Puisque le degré m de U ne peut être plus grand que $n-1$, le degré $n-2$ de Q ne peut être plus petit que le degré $m-1$ de P, donc on peut faire

$$34. \quad {}^{m-1}P - {}^{0}\lambda_1 . {}^{n-2}Q = {}^{n-2}U_1.$$

Cela étant substitué dans (33.) donne

$$35. \quad {}^{m}U = {}^{n-1}V_1 . {}^{0}\lambda_1 + {}^{n-2}U_1(x-x_1).$$

En divisant cette équation par ${}^{n}V = (x-x_1){}^{n-1}V_1$ (28.) on aura

$$36. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{0}\lambda_1}{x-x_1} + \frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1}.$$

III. On auroit eu le même résultat si m étoit $= n-1$. La fraction $\frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1}$, dont le dénominateur ne contient qu'une seule fois le facteur $x-x_2$, peut donc aussi être décomposée de nouveau et de la même manière que l'a été celle $\frac{{}^{m}U}{{}^{n}V}$ et on aura

$$\frac{{}^{n-2}U_1}{{}^{n-1}V_1} = \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{n-3}U_2}{{}^{n-2}V_2}.$$

Digitized by Google

On aura également

$$37.\quad \frac{{}^{m-3}U_2}{{}^{n-2}V_2} = \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{n-4}U_2}{{}^{n-3}V_2}$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$38.\quad \frac{{}^{n-r}U}{{}^{n-r+1}V_{r-1}} = \frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r} + \frac{{}^{n-r-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

Donc en substituant on aura, $n-r-1$ étant $= s-1$ (26.)

$$39.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}\gamma.{}^{s}N} = \frac{{}^{0}\lambda_1}{x-x_1} + \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2} + \frac{{}^{0}\lambda_3}{x-x_3} \ldots\ldots + \frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

IV. Prenant la somme des fractions partielles $\frac{{}^{0}\lambda_1}{x-x_1}, \frac{{}^{0}\lambda_2}{x-x_2}, \ldots \frac{{}^{0}\lambda_r}{x-x_r}$ elle sera de la forme $\frac{{}^{r-1}T}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_r)} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}\gamma}$; donc l'équation (39.) donnera

$$40.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}\gamma.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}\gamma} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

V. Il est à remarquer que dans cette expression aucun facteur de ${}^{r}\gamma$ ne peut être diviseur de ${}^{r-1}T$ ni aucun facteur de ${}^{s}N$ diviseur de ${}^{s-1}U_r$. En effet l'équation (40.), multipliée par ${}^{r}\gamma.{}^{s}N$, donne

$$41.\quad {}^{m}U = {}^{s}N.{}^{r-1}T + {}^{r}\gamma.{}^{s-1}U_r$$

et cela fait voir que si ${}^{r}\gamma$ et ${}^{r-1}T$ ou ${}^{s}N$ et ${}^{s-1}U_r$ avoient quelque facteur *commun*, ce facteur devoit être en même tems diviseur de ${}^{m}U$, ce qui n'est pas, parcequ'on a supposé que ${}^{m}U$ n'a pas de facteur commun avec ${}^{r}\gamma$ et ${}^{s}N$.

Donc les deux fractions partielles dans (40.) sont *irréductibles*, et l'expression (40.) conserve sa forme si même m a sa plus grande valeur $n-1$.

VI. Supposons en second lieu que l'exposant ϱ de γ dans l'expression générale des fractions algébriques soit >1 et

$$42.\quad \frac{{}^{m}U}{{}^{n}V} = \frac{{}^{m}U}{{}^{r}\gamma^{\varrho}.{}^{s}N}, \text{ de sorte que } n = r\varrho + s.$$

Il est supposé encore qu'aucun facteur de ${}^{r}\gamma$ ne soit diviseur ni de ${}^{m}U$ ni de ${}^{s}N$.

Divisons ${}^{m}U$ par ${}^{r}\gamma.{}^{s}N$, le *quotient* sera généralement du degré $m-r-s$ et le *reste* du degré $r+s-1$ et on pourra écrire

$$43.\quad {}^{m}U = {}^{r}\gamma.{}^{s}N.{}^{m-r-s}P + {}^{r+s-1}R.$$

Il est vrai que le nombre du degré du *quotient* P peut être *plus petit* que $m-r-s$ et même zéro, et que celui du degré du *reste* peut être un nombre *plus petit* que $r-s-1$, zéro non excepté. Mais les nombres

Digitized by Google

des degrés du quotient et du reste ne peuvent être *plus grands* que $m-r-s$ et $r-s-1$.

Il y a aussi à remarquer que le reste R ne peut être divisible par aucun facteur de ${}^{r}y$ ni de ${}^{s}N$; car s'il l'étoit, le polynome ${}^{m}U$, en vertu de l'équation (43.), devroit être également divisible par ce facteur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

VII. Maintenant l'équation (43.) donne

$$44. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y \cdot {}^{s}N} = {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{r+s-1}R}{{}^{r}y \cdot {}^{s}N}.$$

Ici la fraction $\frac{{}^{r+s-1}R}{{}^{r}y \cdot {}^{s}N}$ est dans le cas de celle (26.). Elle est irreductible, son dénominateur est égal à celui de (26.) et le degré de son numérateur est plus petit que celui de son dénominateur, au moins d'une unité. Ce sont les conditions de forme de la fraction (26.). Donc la fraction $\frac{R}{yN}$ est décomposable suivant l'expression (40.) et on peut écrire

$$45. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y \cdot {}^{s}N} = {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}y} + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N}.$$

VIII. Comprenons dans un seul terme le premier et le troisième terme à droite dans (45.). Ce terme sera une fraction qui a ${}^{s}N$ pour dénominateur et pour numérateur un polynome Z dont le degré est $m-r$ ou $s-1$ selon que l'un ou l'autre de ces nombres est le plus grand. Le plus haut degré de ce numérateur sera $n-r-1$, puisque la plus grande valeur que puisse avoir m est $n-1$. L'autre nombre $s-1$ sera toujours plus petit que $n-r-1$. Donc on peut généralement écrire

$$46. \quad {}^{m-r-s}P + \frac{{}^{s-1}U_r}{{}^{s}N} = \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{s}N},$$

et en substituant dans (45.),

$$47. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y \cdot {}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}T}{{}^{r}y} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{s}N}.$$

Divisant enfin cette équation par ${}^{r}y^{\varrho-1}$ et écrivant w à la place de T, on aura

$$48. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1} \cdot {}^{s}N}$$

et c'est précisément la forme de décomposition (5.) dont il s'agissait de démontrer l'admissibilité.

IX. Multipliant l'expression (48.) ou bien (5.) par ${}^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N$ elle donne

$$49. \quad {}^{m}U = {}^{s}N \cdot {}^{r}w + {}^{r}y \cdot {}^{n-r-1}Z.$$

Digitized by Google

Cette équation fait voir que $^{n-r-1}Z$ ne peut avoir de facteur commun avec ^{s}N; car s'il en avoit, ce facteur devrait aussi être diviseur de ^{r}U, ce qui n'a pas lieu suivant l'hypothèse. Mais $^{n-r-1}Z$ pourra avoir des diviseurs communs *avec* ^{r}y, car il se pourroit bien que

$$50. \quad {}^{m}U - {}^{s}N \cdot {}^{r}w$$

eût quelque diviseur commun avec ^{r}y et fût même divisible par toute la quantité ^{r}y ou par une puissance entière de ^{r}y.

X. Donc si l'on veut supposer que la fraction donnée $\frac{^{m}U}{^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N}$ soit *irréductible*, c'est à dire que son numérateur ^{m}U n'ait aucun facteur commun ni avec y ni avec N, il faut, en *continuant* la décomposition suivant (§. 2.), avant de décomposer la nouvelle fraction $\frac{^{n-r-1}Z}{^{r}y^{\varrho-1} \cdot {}^{s}N}$, en éliminer les facteurs communs que pourroit avoir Z avec y ou N.

XI. Mais voyons comment le résultat se modifie *si l'on ne fait pas* la supposition que ^{m}U n'ait pas des diviseurs communs avec ^{r}y ou ^{s}N, en supposant seulement que ^{r}y et ^{s}N soient prémiers *entre eux*.

Soit dans ce cas ^{m}U divisible par $x - x_1$, facteur de ^{r}y, on aura dans (29.) $^{\circ}A = 0$, mais on n'aura pas dans (30.) $^{\circ}B = 0$, $^{n-1}V_1 = \frac{^{n}V}{x-x_1}$ (28.) $= \frac{^{r}y \cdot {}^{s}N}{x-x_1}$ n'étant pas divisible par $x - x_1$ vu qu'on a supposé que ^{r}y ne contienne qu'une seule fois le facteur $x - x_1$ et qu'il n'ait aucun facteur commun avec ^{s}N. Donc on aura $^{\circ}\lambda = 0$ (31.) et cela donne en (36.)

$$51. \quad \frac{^{m}U}{^{n}V} = \frac{^{n-2}U_2}{^{n-1}V_2},$$

ce qui d'ailleurs est aussi évident par lui même, car $\frac{^{n-2}U_2}{^{n-2}V_2}$ n'exprime autre chose que ce qu'on trouve si l'on divise ^{m}U et ^{n}V par leur facteur commun $x - x_1$.

La même chose à lieu pour tout autre facteur commun de ^{m}U et ^{r}y. Autant de numérateurs λ dans (39.) seront zéro qu'il y aura de facteurs communs dans ^{m}U et ^{r}y. Donc, comme il est facile de voir, le numérateur ^{s-1}T dans (40.) aura commun avec ^{r}y les mêmes facteurs qui se trouvent dans ^{m}U et ^{r}y en même tems. Ces facteurs n'influent d'ailleurs en rien sur l'autre fraction $\frac{^{s-1}U_r}{^{s}N}$ (40.) dont le numérateur et le dénominateur peuvent encore avoir des facteurs communs. On tire aussi ce

Digitized by Google

résultat de l'équation (41.). Car si ${}^mU$ et ${}^ry$ ont des facteurs communs, il faut, comme le fait voir cette équation, que ces mêmes facteurs soient diviseurs de ${}^{r-1}T$, ${}^sN$ ayant été supposé premier avec ${}^ry$.

On peut donc conserver l'expression (40.) et l'appliquer également au cas où la fraction $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ *n'est pas irréductible.* L'expression de $\frac{{}^mU}{{}^nV}$ ne change dans ce cas qu'en ce que la partie $\frac{{}^{r-1}T}{{}^ry}$ n'est pas alors irreductible non plus.

Cela posé, on voit que la formule de décomposition (40.) est encore applicable à la fraction $\frac{{}^{r+s-1}R}{{}^ry.{}^sN}$ (44.), qui ne sera pas irreductible, si $\frac{{}^mU}{{}^ry.{}^sN}$ ne l'est pas; donc la formule finale (47.) ou (48.) ou (5.) reste encore la même si ${}^mU$ a des facteurs communs avec ${}^ry$ ou ${}^sN$. Il n'y a pas d'autre différence dans les deux cas d'irréductibilité et de réductibilité de la fraction donnée, que la suivante: dans le premier cas la première des deux fractions partielles qu'un trouve est irréductible, et dans le second cas elle est réductible.

Donc la *forme* de décomposition (5.) est tout-à-fait générale et légitime dans tous les cas. Et si la méthode dont on se sert pour *calculer* les numérateurs des fraction partielles n'éxige pas l'irréductibilité de la fraction donnée, on peut toujours sans erreur partir de la forme générale de décomposition (5.).

Voilà la démonstration de la première des deux propositions (§. 2.) qui se présentent dans la décomposition des fractions algébriques, savoir de celle de la forme générale de décomposition. Nous passons à la seconde proposition (No. 2.), au problème de trouver les numérateurs w et Z des fractions partielles (5.).

Seconde section.

Différentes méthodes de calculer les numérateurs des fractions partielles dans lesquelles une fraction donnée peut être décomposée.

§. I. Première méthode: celle des coefficiens indéterminés.

6.

I. Nous avons démontré ci-dessus que l'expression décomposée des fractions algébriques rationnelles $\frac{{}^mU}{{}^{r'}y^{r''}.{}^sN}$ peut toujours être supposée de

Digitized by Google

de la forme

$$52. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N},$$

ou bien de la forme

$$53. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^{r}y^{\varrho-2}} \ldots\ldots + \frac{{}^{r-1}w_{\varrho}}{{}^{r}y} + \frac{{}^{s-1}Z_{\varrho}}{{}^{s}N} \quad (8.)$$

et il s'agit maintenant de trouver les polynomes w et Z dans (52.) ou ceux w_1, w_2, w_3, ... w_{ϱ} et Z dans (53.).

II. La première méthode qui se présente pour cela est, de supposer les coefficiens des polynomes w et Z inconnus ou indéterminés et de tirer leurs valeurs des équations qu'on trouve en égalant les coefficiens des diverses puissances de x à exposans égaux. Ayant vu que les formules (52. et 53.) expriment la fonction donnée dans tous les cas, il faut que les numérateurs w et Z puissent être trouvés toujours complètement.

III. En multipliant (52. et 53.) par ${}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N$ on a

$$54. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w.{}^{s}N + {}^{n-r-1}Z.{}^{r}y, \text{ et}$$

$$55. \quad {}^{m}U = [{}^{r-1}w_1 + {}^{r-1}w_2.{}^{r}y + {}^{r-1}w_3.{}^{r}y^2 \ldots + {}^{r-1}w_{\varrho}.{}^{r}y^{\varrho-1}]\,{}^{s}N + {}^{s-1}Z_{\varrho}.{}^{r}y^{\varrho}.$$

La première de ces expressions offre r coefficiens indéterminés dans le polynome ${}^{r-1}w$ de degré $r-1$, et $n-r$ coefficiens dans le polynome ${}^{n-r-1}Z$ de degré $n-r-1$. Le nombre total des coefficiens indéterminés est donc $n+n-r=n$.

La seconde expression contient r coefficiens indéterminés dans chacun des ϱ polynomes ${}^{r-1}w_1$, ${}^{r-1}w_2$, ${}^{r-1}w_3$, ... ${}^{r-1}w_{\varrho}$ qui sont tous de degré $r-1$. Cela fait $r\varrho$ coefficiens indéterminés. Elle contient en outre s coefficiens dans le polynome ${}^{s-1}Z_{\varrho}$ qui est de degré $s-1$. Le nombre total des coefficiens indéterminés est donc encore $r\varrho+s=n$.

Ce nombre est donc toujours n, et puisque la plus grande valeur de m est $n-1$, ${}^{m}U$ peut contenir de son coté également n coefficiens *déterminés* mais non plusieurs. Si m est $< n$, les coefficiens des puissances de x plus hautes que x^m et plus faibles que x^n doivent être regardés $= 0$. Mais dans tous les cas il existe n coefficiens donnés, ou pour mieux dire, n différentes puissances de x. Donc il y aura aussi dans tous les cas n équations, renfermant les n coefficiens inconnus. Ces équations seront toujours du *premier* degré ou de forme *linéaire*, parceque les polynomes *indéterminés* w et Z ne se trouvent multipliés que par des polynomes *déterminés*. Donc les coefficiens indéterminés pourront toujours être trouvés sans quelque difficulté de la part de la résolution des équa-

Digitized by Google

tions. Et puisqu'on a démontrée que les expressions (52. et 53.) ont lieu dans tous les cas, ou est sûr qu'aucune équation déterminante ne peut être identique, et que les équations déterminantes suffiront toujours à donner tous les coefficiens inconnus. Donc la décomposition de la fraction donnée suivant la forme (52.) ou (53.) pourra toujours être complètement effectuée par la méthode des coefficiens indéterminés.

IV. Il faut remarquer qu'il vaudra toujours mieux de calculer suivant la forme (53. et 55.) et même de décomposer sur le champ ultérieurement la fraction $\frac{{}^{\varrho-1}Z_\varrho}{{}^{s}N}$ si l'on a besoin de cette nouvelle décomposition; car le nombre des coefficiens indéterminés, dont la valeur est à calculer, est toujours le même dans (52.), dans (53.) et dans les formules ultérieurement décomposées. Donc en opérant suivant les dernières, on parvient au résultat final par le même calcul qui n'en donnerait qu'une partie si l'on calculoit suivant (52.).

7.

Nous donnerons *deux exemples en nombres*, auxquels nous appliquerons les différentes méthodes de décomposition, tant qu'il sera necessaire pour comparer entre eux les calculs qu'elles exigent. Dans l'un de ces deux exemples y sera du *premier* degré seulement; dans l'autre, ce facteur sera d'un degré plus élevé; mais, pour ne pas trop agrandir le calcul, il ne sera que du *second* degré; c'est le cas qui se présente le plus souvent, et, si l'on veut, c'est celui, auquel on peut réduire *tous* les autres cas sans tomber dans le calcul des imaginaires, parceque tout polynome peut être décomposé, comme on sait, en facteurs du *second* degré à coefficiens *réels*, combinés avec un facteur de *premier* degré si l'exposant est impair. Cependant les différentes méthodes de décomposition, comme on le verra, ne sont pas restreintes aux cas où le dénominateur de la fraction donnée a été décomposé en facteurs du premier et du second degré; au contraire elles sont généralement applicables.

I. *Premier exemple*

56. ${}^{m}U = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35$, donc $m = 6$;

57. ${}^{r}y^{\varrho} = (x-2)^5$, donc $r = 1$, $\varrho = 5$;

58. ${}^{s}N = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81$, donc $s = 5$ et $s + r\varrho = n = 10$;

59. $$\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35}{(x-2)^5 (x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}.$$

Digitized by Google

II. *Second exemple*

60. $^{m}U = 17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131$,
donc $m = 8$;

61. $^{r}\gamma^{\varrho} = (x^2 - 2x + 5)^3$, donc $p = 2$, $\varrho = 3$;

62. $^{s}N = x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3$, donc $s = 5$ et $s + r\varrho = n = 11$;

63. $$\frac{^{m}U}{^{r}\gamma^{\varrho}.\,^{s}N} = \frac{17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131}{(x^2 - 2x + 5)^3 (x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)}.$$

8.

I. Pour appliquer au *premier* exemple (§. 7.) la méthode des coefficiens indéterminés, en calculant suivant les formules (53. et 55.), il y aura à supposer

64. $$\begin{cases} ^{r-1}w_1 = a_1,\ ^{r-1}w_2 = a_2,\ ^{r-1}w_3 = a_3,\ ^{r-1}w_4 = a_4,\ ^{r-1}w_5 = a_5,\ r-1 \text{ étant} = 0, \\ ^{r-1}Z_{\varrho} = \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \end{cases}$$

où $a_1 \ldots . a_5$, $\lambda_1 \ldots . \lambda_5$ sont les $n = 10$ coefficiens indéterminés qu'il s'agit de trouver.

La formule (55.) donne

65. $$x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35$$
$$= [a_1 + a_2(x-2) + a_3(x-2)^2 + a_4(x-2)^3 + a_5(x-2)^4][x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81]$$
$$+ [\lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5](x-2)^5$$
$$= [a_5 x^4 + (a_4 - 8a_5)x^3 + (a_3 - 6a_4 + 24a_5)x^2 + (a_2 - 4a_3 + 12a_4 - 32a_5)x + a_1 - 2a_2 + 4a_3 - 8a_4 + 16a_5]$$
$$\times (x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)$$
$$+ (\lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)(x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32).$$

En faisant les produits à droite et en égalant les coefficiens d'égales puissances de x, on trouve 10 équations de premier degré, desquels on tirera par l'élimination les 10 coefficiens indéterminés $a_1, a_2, \ldots . a_5, \lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_5$.

II. En appliquant au second exemple (No. 7.) la méthode des coefficiens indéterminés et en calculant suivant les formules (53. et 55.), on aura à supposer

66. $$\begin{cases} ^{r-1}w_1 = a_1 x + \beta_1,\ ^{r-1}w_2 = a_2 x + \beta_2,\ ^{r-1}w_3 = a_3 x + \beta_3,\ r-1 \text{ étant} = 1, \\ ^{r-1}Z_{\varrho} = \lambda_1 x^6 + \lambda_2 x^5 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_5$ sont les $n = 11$ coefficiens indéterminés qu'il s'agit de trouver.

La formule (55.) donne dans le cas actuel

66. $$17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131$$
$$= [a_1 x + \beta_1 + (a_2 x + \beta_2)(x^2 - 2x + 5) + (a_3 x + \beta_3)(x^2 - 2x + 5)^2](x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)$$
$$+ (\lambda_1 x^6 + \lambda_2 x^5 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5)(x^2 - 2x + 5)^3.$$

Digitized by Google

En fesant les produits à droite et en égalant les coefficiens d'égales puissances de x, on trouvera 11 équations linéaires qui serviront à déterminer les 11 coefficiens désignés par α, β et λ.

Sans finir le calcul on voit qu'il n'a pas d'autres difficultés que la longueur, et qu'il donnera des valeurs uniques et réelles des coefficiens cherchés. Mais on voit aussi que, l'élimination y comprise, il est vraiment énorme dans les deux exemples, quoique ces exemples ne soient pas choisis parmi les plus compliqués. Nous passerons donc à d'autres méthodes.

§ II. Seconde méthode. Méthode ancienne d'Euler.

9.

I. Toute expression décomposée d'une fraction sera nécessairement *identique* avec celle de la fraction elle même. Donc la double expression de la fraction ne constitue aucune *dépendance* des coefficiens des polynomes de x. Donc la valeur de ces coefficiens reste la même *quelle que soit la valeur qu'on donne à* x.

II. Soient $x_1, x_2, x_3 \ldots x_r$ les valeurs de x qui donnent

$$67. \quad {}^{r}y = 0,$$

de sorte que

$$68. \quad (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r) = {}^{r}y,$$

et distinguons les valeurs que w, U, N, Z prennent pour $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ par les indices 1, 2, 3, ... r mis à gauche et en bas des lettres w, U, N, Z: les équations (54., 55.) auront également lieu et avec les mêmes valeurs des coefficiens si l'on y écrit ${}_1w, {}_2w, \ldots {}_rw, {}_1U, {}_2U, \ldots {}_rU$ etc. au lieu de w, U etc.; car on ne fait par là qu'assigner à x les valeurs particulières $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$. La substitution des r valeurs particulières de x fournira donc r équations différentes, et de ces équations on pourra trouver autant de coefficiens indéterminés.

III. Mais puisque ${}^{r}y = 0$ pour $x = x_1, x_2, \ldots x_r$, les parties à droites des équations (54., 55.) se réduiront à leurs premiers termes et les équations déterminantes, qu'on trouve d'abord, seront les suivantes

$$69. \quad {}^{m}_{1}U = {}^{r-1}_{1}w_1 \cdot {}^{s}_{1}N, \; {}^{m}_{2}U = {}^{r-1}_{2}w_1 \cdot {}^{s}_{2}N, \; {}^{m}_{3}U = {}^{r-1}_{3}w_1 \cdot {}^{s}_{3}N, \ldots \; {}^{m}_{r}U = {}^{r-1}_{r}w_1 \cdot {}^{s}_{r}N.$$

Ces r équations suffiront à trouver les r coefficiens indéterminés de ${}^{r-1}w_1$.

IV. Le numérateur ${}^{r-1}w_1$ de la première fraction partielle (53.) ayant été trouvé par là complètement, l'équation (55.) donne

$$70. \quad \frac{{}^{m}U - {}^{s}N \cdot {}^{r-1}w_1}{{}^{r}y} - {}^{x}U = [{}^{r-1}w_2 + {}^{r-1}w_3 \cdot {}^{r}y + {}^{r-2}w_4 \cdot {}^{r}y^2 \ldots + {}^{r-1}w_\varrho \cdot {}^{r}y^{\varrho-2}]\,{}^{s}N + {}^{\varrho-1}Z_\varrho \cdot {}^{r}y^{\varrho-1}$$

Digitized by Google

où l'on voit que, $\frac{{}^{m}U-{}^{s}N.{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y}$ étant égal à un polynome *non-fractionnaire*, ${}^{m}U-{}^{s}N.{}^{r-1}w_1$ doit être nécessairement *divisible* par ${}^{r}y$. Nous mettons à côté l'équation (54.) parceque le développement ultérieur s'exécute plus facilement suivant l'équation (55.).

V. Ayant calculé le quotient $\frac{{}^{m}U-{}^{s}N.{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y}=\overset{1}{U}$ il n'y a qu'à l'écrire au lieu de U dans (69.) pour trouver $\overset{1}{w}_2$ et ainsi de suite, car l'équation (70.), et celles qui suivent, sont parfaitement semblables à l'équation (55.). Ayant enfin épuisé les différentes puissances de ${}^{r}y$, le dernier quotient donnera immédiatement le numérateur ${}^{s-1}Z_\varrho$ (53.) de la seconde partie de la fraction décomposée.

VI. Si $r=1$, c'est à dire si y n'est que du premier degré, w_1, w_2, w_3, ... w_ϱ sont de degré 0 ou indépendants de x. Donc dans ce cas les équations (69.) se réduisent à une seule et donnent immédiatement

$$71. \quad w_1=\frac{{}_1U}{{}_1N}.$$

Après cela, l'équation (70.) donne

$$72. \quad \left(\frac{U-\frac{{}_1U}{{}_1N}N}{y}\right).\frac{1}{N}=\frac{{}_1\overset{1}{U}}{{}_1N}=w_2,$$

bien entendu que dans $\frac{U-\frac{{}_1U}{{}_1N}N}{y}$, *après* la division, et dans N on doit faire $x=x_1$, et ainsi de suite.

10.

Appliquons cette méthode aux deux exemples ci-dessus.

Premier exemple (59.).

I. Dans cet exemple $y=x-2=0$ donne

$$73. \quad x_1=2,$$

donc

$$74. \quad \begin{cases} {}^{m}_{1}U=2^6-9.2^5+30.2^4-42.2^3+23.2^2-21.2+35=671-666=5, \\ {}^{s}N=2^5-6.2^4+2.2^3+51.2^2-117.2+81=333-330=3, \end{cases}$$

donc

$$75. \quad w_1=\frac{{}_1U}{{}_1N}\ (71.)=\frac{5}{3}.$$

Digitized by Google

II. Maintenant on a

$$76.\quad \overset{1}{U} = \frac{{}^{m}U - w_1 \, {}^{s}N}{{}^{r}\gamma}$$

$$= \frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 34 - \frac{5}{3}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(3x^5 - 26x^4 + 68x^3 - 186x + 150)$$

et cela donne pour $x = 2$, ${}_1\overset{1}{U} = \frac{2}{3}$, donc, ${}_1^{s}N$ étant $= 3$ (74.),

$$77.\quad w_2 = \frac{{}_1\overset{1}{U}}{{}_1N} \text{ (72.)} = \tfrac{2}{9} \text{ (74.)}$$

III. En mettant de nouveau $\overset{1}{U}$ au lieu de U et w_2 au lieu de w_1 dans (72.) on a

$$78.\quad \overset{2}{U} = \frac{\overset{1}{U} - w_2 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(3x^5 - 26x^4 + 68x^3 - 186x + 150) - \frac{2}{9}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{9}(7x^4 - 52x^3 + 96x^2 + 90x - 144)$$

et cela donne pour $x = 2$, ${}_1\overset{2}{U} = \frac{116}{9}$, donc

$$79.\quad w_2 = \frac{{}_1\overset{2}{U}}{{}_1N} \text{ (72.)} = \frac{116}{27}.$$

IV. En mettant encore $\overset{2}{U}$ au lieu de U et w_3 au lieu de w_2 dans (72.) on a

$$80.\quad \overset{3}{U} = \frac{\overset{2}{U} - w_3 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}(7x^4 - 52x^3 + 96x^2 + 90x - 144) - \frac{116}{27}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{27}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4914)$$

et cela donne pour $x = 2$, $\overset{3}{U} = \frac{338}{27}$, donc

$$81.\quad w_4 = \frac{{}_1\overset{3}{U}}{{}_1N} \text{ (72.)} = \frac{338}{81}.$$

V. Mettant $\overset{3}{U}$ au lieu de U et w_4 au lieu de w_3 dans (72.) on a

$$82.\quad \overset{4}{U} = \frac{\overset{3}{U} - w_4 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{27}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4914) - \frac{338}{81}(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{81}(-338x^4 + 1004x^3 + 2787x^2 - 9918x + 6318)$$

Digitized by Google

et cela donne pour $x=2$, $\mathring{U}=\frac{254}{81}$, donc

$$83. \quad w_5 = \frac{{}_1\mathring{U}}{{}_1N}\ (72.) = \frac{254}{243},$$

VI. Enfin mettant $\mathring{U}$ au lieu de U et w_5 au lieu de w_4 dans (72.) on a, les puissances de y ayant été épuisées:

$$85. \quad {}^{s-1}Z_\varrho = \frac{\mathring{U}-w_5 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{81}(-338x^4+1004x^3+2787x^2-9918x+6318)-\frac{2}{243}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{243}(-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810).$$

VII. En substituant w_1, w_2, ... w_5 et ${}^{s-1}Z_\varrho$ (76., 77., 79., 81., 83. et 84.) dans (53.) on a

$$85. \quad \frac{x^6-9x^5+30x^4-42x^3+23x^2-21x+35}{(x-2)^6(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)} = \frac{5}{3(x-2)^6}+\frac{2}{9(x-2)^4}+\frac{116}{27(x-2)^3}$$
$$+\frac{338}{81(x-2)^2}+\frac{254}{243(x-2)}+\frac{-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810}{243(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)},$$

et c'est l'expression de la fraction proposée décomposée complètement en fraction partielles pour ce qui regarde le facteur $(x-2)^6$ du dénominateur.

Seconde exemple (63.).

VIII. Ici l'équation

$$86. \quad y = x^2-2x+5 = 0$$

donne

$$87. \quad \left.\begin{matrix} x_1 = 1+\sqrt{(1-5)} = 1+2i \\ x_2 = 1-\sqrt{(1-5)} = 1-2i \end{matrix}\right\} \text{ en fesant } \sqrt{-1} = i.$$

Il faut donc subsituer d'abord ces valeurs de x_1 et x_2 au lieu de x dans U, N et w_1 (60., 62. et 66.). Cela donnera ${}_1U$, ${}_2U$, ${}_1N$, ${}_2N$ et ${}_1w_1$, ${}_2w$: Après on trouvera par les deux équations

$$88. \quad {}_1U = {}_1w_1 \cdot {}_1N \text{ et } {}_2U = {}_2w_1 \cdot {}_2N \ (69.)$$

les deux coefficiens indéterminés α_1 et β_1 de w_1 (66.).

IX. On peut encore abréger ce calcul comme suit. Les expressions de U, N et w_1, en y substituent x_1 au lieu x, seront de la forme

$$89. \quad {}_1U = p+qi, \ {}_1N = \mu+\nu i \text{ et } {}_1w_1 = \varkappa+\lambda i$$

et celles de ${}_2U$, ${}_2N$ et ${}_2w_1$ seront nécessairement

$$90. \quad {}_2U = p-qi, \ {}_2N = \mu-\nu i \text{ et } {}_2w_1 = \varkappa-\lambda i,$$

car on obtient x_2 si l'on écrit dans x_1, $-i$ au lieu de $+i$ (87.): donc on tirera aussi des résultats de la substitution de x_1 au lieu de x (89.),

Digitized by Google

II. Maintenant on a

$$76.\quad {}^{1}U = \frac{{}^{m}U - w_1\,{}^{s}N}{{}^{r}\gamma}$$

$$= \frac{x^6-9x^5+30x^4-42x^3+23x^2-21x+34-\frac{5}{3}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{3}(3x^5-26x^4+68x^3-186x+150)$$

et cela donne pour $x=2$, ${}_{1}{}^{1}U = \frac{2}{3}$, donc, ${}_{1}{}^{s}N$ étant $= 3$ (74.),

$$77.\quad w_2 = \frac{{}_{1}{}^{1}U}{{}_{1}{}^{s}N}\ (72.) = \tfrac{2}{9}\ (74.)$$

III. En mettant de nouveau ${}^{1}U$ au lieu de U et w_2 au lieu de w_1 dans (72.) on a

$$78.\quad {}^{2}U = \frac{{}^{1}U - w_2 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(3x^5-26x^4+68x^3-186x+150)-\frac{2}{9}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{9}(7x^4-52x^3+96x^2+90x-144)$$

et cela donne pour $x=2$, ${}_{1}{}^{2}U = \frac{116}{9}$, donc

$$79.\quad w_2 = \frac{{}_{1}{}^{2}U}{{}_{1}{}^{s}N}\ (72.) = \frac{116}{27}.$$

IV. En mettant encore ${}^{2}U$ au lieu de U et w_3 au lieu de w_2 dans (72.) on a

$$80.\quad {}^{3}U = \frac{{}^{2}U - w_3 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}(7x^4-52x^3+96x^2+90x-144)-\frac{116}{27}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{81}(-116x^4+485x^3+582x^2-4464x+4914)$$

et cela donne pour $x=2$, ${}^{3}U = \frac{338}{27}$, donc

$$81.\quad w_4 = \frac{{}_{1}{}^{3}U}{{}_{1}{}^{s}N}\ (72.) = \frac{338}{81}.$$

V. Mettant ${}^{3}U$ au lieu de U et w_4 au lieu de w_3 dans (72.) on a

$$82.\quad {}^{4}U = \frac{{}^{3}U - w_4 N}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{81}(-116x^4+485x^3+582x^2-4464x+4914)-\frac{338}{81}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \tfrac{1}{81}(-338x^4+1004x^3+2787x^2-9918x+6318)$$

Digitized by Google

et cela donne pour $x=2$, $\mathring{U}=\frac{254}{81}$, donc

$$83. \quad w_5 = \frac{{}_1\mathring{U}}{{}_1N} \ (72.) = \frac{254}{243},$$

VI. Enfin mettant $\mathring{U}$ au lieu de U et w_5 au lieu de w_4 dans (72.) on a, les puissances de y ayant été épuisées:

$$85. \quad {}^{s-1}Z_\varrho = \frac{\mathring{U}-w_5 N}{y}$$

$$= \frac{\frac{1}{11}(-338x^4+1004x^3+2787x^2-9918x+6318)-\frac{2}{243}(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)}{x-2}$$

$$= \frac{1}{243}(-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810).$$

VII. En substituant $w_1, w_2, \ldots . w_5$ et ${}^{s-1}Z_\varrho$ (76., 77., 79., 81., 83. et 84.) dans (53.) on a

$$85. \quad \frac{x^6-9x^5+30x^4-42x^3+23x^2-21x+35}{(x-2)^5(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)} = \frac{5}{3(x-2)^5}+\frac{2}{9(x-2)^4}+\frac{116}{27(x-2)^3}$$
$$+\frac{338}{81(x-2)^2}+\frac{254}{243(x-2)}+\frac{-254x^4+2x^3+2508x^2+423x+810}{243(x^5-6x^4+2x^3+51x^2-117x+81)},$$

et c'est l'expression de la fraction proposée décomposée complètement en fraction partielles pour ce qui regarde le facteur $(x-2)^5$ du dénominateur.

Seconde éxemple (63.).

VIII. Ici l'équation

$$86. \quad y = x^2-2x+5 = 0$$

donne

$$87. \quad \left.\begin{matrix} x_1 = 1+\sqrt{(1-5)} = 1+2i \\ x_2 = 1-\sqrt{(1-5)} = 1-2i \end{matrix}\right\} \text{ en fesant } \sqrt{-1} = i.$$

Il faut donc subsituer d'abord ces valeurs de x_1 et x_2 au lieu de x dans U, N et w_1 (60., 62. et 66.). Cela donnera ${}_1U$, ${}_2U$, ${}_1N$, ${}_2N$ et ${}_1w_1$, ${}_2w$: Après on trouvera par les deux équations

$$88. \quad {}_1U = {}_1w_1 \cdot {}_1N \text{ et } {}_2U = {}_2w_1 \cdot {}_2N \ (69.)$$

les deux coefficiens indéterminés α_1 et β_1 de w_1 (66.).

IX. On peut encore abréger ce calcul comme suit. Les expressions de U, N et w_1, en y substituent x_1 au lieu x, seront de la forme

$$89. \quad {}_1U = p+qi, \ {}_1N = \mu+\nu i \text{ et } {}_1w_1 = \varkappa+\lambda i$$

et celles de ${}_2U$, ${}_2N$ et ${}_2w_1$ seront nécessairement

$$90. \quad {}_2U = p-qi, \ {}_2N = \mu-\nu i \text{ et } {}_2w_1 = \varkappa-\lambda i,$$

car on obtient x_2 si l'on écrit dans x_1, $-i$ au lieu de $+i$ (87.): donc on tirera aussi des résultats de la substitution de x_1 au lieu de x (89.),

Digitized by Google

ceux (90.) de la substitution de x_2 au lieu de x si dans les premiers on écrit $-i$ au lieu de $+i$.

Cela posé, les deux équations (88.), qui déterminent α et β, donnent

$$91. \quad \begin{cases} p+qi = (\mu+\nu i)(\varkappa+\lambda i) = \mu\varkappa+(\mu\lambda+\nu\varkappa)i-\nu\lambda, \\ p-qi = (\mu-\nu i)(\varkappa-\lambda i) = \mu\varkappa-(\mu\lambda+\nu\varkappa)i-\nu\lambda. \end{cases}$$

Ajoutant et soustrayant ces équations l'une de l'autre on aura

$$92. \quad \begin{cases} p = \mu\varkappa-\nu\lambda \text{ et} \\ q = \mu\lambda+\nu\varkappa. \end{cases}$$

Ces équations prennent maintenant la place de celles (88.) et servent à déterminer les coefficiens indéterminés α et β contenus dans $\varkappa$ et λ (89. et 90.). Elles sont préferables à celles (88.) puisqu'elles ne renferment pas des quantités imaginaires.

X. On peut se servir d'une semblable transformation pour éliminer les imaginaires des équations déterminantes (69.) et pour les réduire à d'autres qui ne renferment que des quantités réelles, même dans les cas où il y a plus de deux coefficiens indéterminés. Mais on voit bien que la substitution des valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ tirées de l'équation $y=0$, dans U, N, w, et les calculs qui suivent, sont fort pénibles. Ils seroient déjà assez fatigants dans l'exemple choisi. Par cette raison nous ne les continuerons pas; nous renverrons plutôt la décomposition de la fraction du second exemple aux méthodes suivantes.

§. III. Troisième méthode. Application du calcul différentiel à la méthode précédente.

11.

I. Si dans l'équation identique $fx = Fx$, où x peut avoir une valeur quelconque, on mèt $x+k$ au lieu de x, k étant arbitraire, on trouve

$$93. \quad fx + k\partial fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 fx \ldots = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx \ldots,$$

et de cette équation on tire

$$94. \quad \partial fx = \partial Fx, \quad \partial^2 fx = \partial^2 Fx, \quad \partial^3 fx = \partial^3 Fx, \ldots$$

II. Si l'on applique cette transformation à l'équation *identique* (55.), on trouvera plusieurs équations différentes composées des quantités U, w, y, N, Z et de leurs *différentielles*.

Mais si *après* les différentiation on donne à x les valeurs particulières qui rendent y égal à zéro, tous les membres des différentes équations qui renferment y s'évanuiront. Ces membres seront, d'abord dans

Digitized by Google

la *première* équation différentielle, tous ceux qui tiennent leur origine des termes de l'équation primitive contenant y dans des puissances supérieures à la première, dans la *seconde* équation différentielle tous ceux que donnent les termes de l'équation primitive contenants des puissances de y plus élevées que la seconde, et ainsi de suite. Donc en différentiant, il suffit davoir égard aux termes $(w_1 + w_2 y) N$ pour la première différentiation, aux termes $(w_1 + w_2 y + w_3 y_2) N$ pour la seconde etc.

On aura donc

$$95. \begin{cases} U = w_1 N, \\ \partial U = [\partial w_1 + y\,\partial w_2 + w_2 \partial y] N + [w_1 + w_2 y]\,\partial N, \\ \partial^2 U = [\partial^2 w_1 + \partial y\,\partial w_2 + y\,\partial^2 w_2 + \partial w_2 \partial y + w_2 \partial^2 y + \partial^2 w_3 y^2 + 4y \partial y\,\partial w_3 + 2w_3 \partial y^2 + 2w_3 y\,\partial^2 y] N \\ \qquad + 2[\partial w_1 + y\,\partial w_2 + w_2 \partial y + y^2 \partial w_3 + 2w_3 y\,\partial y]\,\partial N \\ \qquad + [w_1 + y w_2 y^2 w_3]\,\partial^2 N, \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Mais y étant $= 0$, ces équations se réduisent à

$$96. \begin{cases} U = w_1 N \\ \partial U = [\partial w_1 + w_2 \partial y] N + w_1 \partial N \\ \partial^2 U = [\partial^2 w_1 + 2\partial y\,\partial w_2 + w_2 \partial^2 y + 2w_3 \partial y^2] N + 2[\partial w_1 + w_2 \partial y]\,\partial N + w_1 \partial^2 N \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

III. Toutes les différentielles des quantités w, y, N, U s'évanuissent aussitôt que les nombres de leurs ordres surpassent ceux des degrés des quantités mêmes. Donc si le nombre r du degré de la quantité y est 1, *toutes* les différentielles de w seront zéro, puisqu'alors le nombre $r-1$ du degré de w est zéro; les différentielles de y dès la seconde le seront également

Donc dans ce cas les formules (96.) se reduiront à

$$97. \begin{cases} U = w_1 N, \\ \partial U = w_2 N \partial y + w_1 \partial N, \\ \partial^2 U = 2w_3 N \partial y^2 + 2w_2 \partial N \partial y + w_1 \partial^2 N, \\ \partial_3 U = 6w_4 N \partial y^3 + 6w_2 \partial N \partial y^2 + 3w_2 \partial^2 N \partial y + w_1 \partial^3 N, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

IV. Il est entendu que dans les formules (96., 97.) il faut donner à x successivement les r valeurs x_1, x_2, x_3, ... x_r qui satisfait à l'équation $^r y = 0$. Donc chaque équation donnera r différentes autres équations. Par ex. la première équation (96., 97.) donnera les r équations différentes

Digitized by Google

98. $_1U = {}_1w_{1\cdot 1}N$, $_2U = {}_2w_{1\cdot 2}N$, $_3U = {}_3w_{1\cdot 3}N$, ... $_rU = {}_rw_{1\cdot 3}N$ qui s'accordent avec (69.). Les r différentes équations représentées par chaque équation (96., 97.) suffiront pour déterminer les r coefficiens indéterminés d'une des quantités w_1, w_2, w_3 .... w_ϱ. De là on voit qu'il faut aller jusqu'à la ϱ^{me} équation différentielle pour trouver les numérateurs w_1, w_2, w_3, ... w_r des premiers fractions partielles (53.). La $\varrho + 1^{\text{me}}$ équation différentielle donnera le numérateur Z de la dernière fraction partielle (53.).

12.

En appliquant les formules (96., 97.) aux exemples ci-dessus on verra que la simplification de calcul qu'elles offrent est assez considérable dans le cas $r = 1$, mais elle ne l'est pas également dans les autres cas.

Premier exemple (59.).

I. La valeur $x_1 = 2$ (73.) de cet exemple donne, en vertu de la première formule (97.), $w_1 = \frac{{}_1U}{{}_1N} = \frac{5}{3}$ comme dans (No. 10. I.).

II. La seconde formule (97.) donne

$$99. \quad w_2 = \frac{\partial_1 U - w_1 \partial_1 N}{{}_1N \partial y}.$$

Mais des valeurs de U, N et y (56., 57., 58.) on tire

$$100. \quad \partial U = 6x^5 - 45x^4 + 120x^3 - 126x^2 + 46x - 21,$$
$$101. \quad \partial N = 5x^4 - 24x^3 + 6x^2 + 102x - 117,$$
$$102. \quad \partial x = 1,$$

et cela donne

$$103. \quad \begin{cases} \partial_1 U = 6.2^5 - 45.2^4 + 120.2^3 - 126.2^2 + 46.2 - 21 = -1, \\ \partial_1 N = 5.2^4 - 24.2^3 + 6.2^2 + 102.2 - 117 = -1, \end{cases}$$

donc suivant (99.)

$$104. \quad w_2 = \frac{-1 + \frac{5}{3}}{+3} = \frac{2}{9}, \text{ comme (77.).}$$

III. La troisième formule (97.) donne

$$105. \quad w_3 = \frac{\partial^2 {}_1U - 2w_2 \partial {}_1N \partial y - w_1 \partial^2 {}_1N}{2\,{}_1N \partial y^2}.$$

De (100.) et (101.) on tire

$$106. \quad \partial^2 U = 30x^4 - 180x^3 + 360x^2 - 252x + 46,$$
$$107. \quad \partial^2 N = 20x^3 - 72x^2 + 12x + 102,$$

et cela donne

Digitized by Google

108. $\begin{cases} \partial_1^3 U = 30.2^4 - 180.2^3 + 360.2^2 - 252.2 + 46 = +22, \\ \partial_1^3 N = 20.2^3 - 72.2^2 + 12.2 + 102 = -2, \end{cases}$

donc suivant (105.)

109. $w_3 = \frac{22 - 2.\frac{3}{2}.-1 - \frac{1}{3}.-2}{2.3.1} = \frac{198+4+30}{54} = \frac{232}{54} = \frac{116}{27}$, comme (79.).

IV. Sans continer plus loin le développement, on voit que le calcul en est plus simple que celui (No. 10.). On épargne au moins les différentes *divisions*.

Second exemple (63.).

V. Sans entrer dans aucun calcul on voit que les formules (96.) offrent encore presque toutes les difficultés de celles (69., 70. etc.), car les imaginaires, s'il y en a dans l'équation $y = 0$, se presentent ici également et l'élimination nécessaire pour trouver les coefficiens indéterminés de $w_1, w_2, \ldots . w_r$ est encore presque la même. Seulement les divisions se simplifient. En résumant, l'épargne n'est pas considérable et le calcul du second exemple seroit encore toujours assez fatigant. C'est pourquoi nous le supprimerons encore.

§. IV. Quatrième méthode. Celle de Mr. Cauchy.

13.

I. Suivant cette méthode on a, en écrivant dans (23.), conformément à la formule (5.), w et Z au lieu de u et T:

110. $$\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r-1}w}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N}.$$

où suivant (17., 15., 16. et 19.)

111. $$^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots.(x-x_r)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots.(x_1-x_r)} + \frac{{}_2U}{{}_2N}\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots.(x-x_r)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots.(x_2-x_r)}\ldots.$$
$$\ldots. + \frac{{}_rU}{{}_rN}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{r-1})}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\ldots.(x_r-x_{r-1})}.$$

Puisqu'on a supposé

112. $(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_r) = {}^{r}y$ (10.)

les numérateurs à droite dans (111.) ne sont autre chose que $\frac{y}{x-x_1}$, $\frac{y}{x-x_2}$, $\ldots.$ $\frac{y}{x-x_r}$ et les dénominateurs se tirent de ces numérateurs si l'on y écrit $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_r$ au lieu de x. En indiquant cela par ${}_1\left(\frac{y}{x-x_1}\right)$, ${}_2\left(\frac{y}{x-x_2}\right)$, $\ldots.$ ${}_r\left(\frac{y}{x-x_r}\right)$ on peut aussi écrire l'expression (111.) comme suit.

Digitized by Google

$$113.\quad {}^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}\left(\frac{\gamma}{x-x_1}\right):{}_1\left(\frac{\gamma}{x-x_1}\right) + \frac{{}_2U}{{}_2N}\left(\frac{\gamma}{x-x_2}\right):{}_2\left(\frac{\gamma}{x-x_2}\right) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{{}_rU}{{}_rN}\left(\frac{\gamma}{x-x_r}\right):{}_r\left(\frac{\gamma}{x-x_r}\right).$$

II. C'est l'expression du numérateur ${}^{r-1}w$ de la première fraction partielle qui fait partie de l'expression décomposée de la fraction donnée (110.). Ayant trouvé w, l'équation (110.) ou bien celle (54.) donnera

$$114.\quad {}^{n-r-1}Z = \frac{{}^mU - {}^{r-1}w \cdot {}^eN}{{}^r\gamma}.$$

On peut maintenant traiter la fraction $\frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^r\gamma^{e-1}\cdot{}^eN}$ comme on a traité la fraction donnée et continuer ainsi la décomposition jusqu'à ce qu'elle soit consommée. Puisque Z (113.) prend la place de U dans le calcul du numérateur w_2 de la seconde fraction partielle (53.), on tirera w_2 de la formule (112.) si l'on y ecrit Z au lieu de U et ainsi de suite.

III. On pourra aussi appliquer le calcul différentiel à ce mode de décomposition; mais nous ne nous y arrêterons pas, parceque cela revient plus ou moins aux opérations de la méthode précédente.

IV. Si $r=1$, c'est á dire si γ (110.) est du premier degré, l'expression de w (111.) se réduit à

$$115.\quad {}^{r-1}w = \frac{{}_1U}{{}_1N}$$

car dans ce cas la quantité $U - uN$ (21.), ou bien $U - wN$, est zéro pour $x = x_1$ si l'on fait $w = \frac{{}_1U}{{}_1N}$.

L'expression (114.) de ${}^{r-1}w_1$ est identique avec celle (71.) de la *seconde* méthode et les expressions des numérateurs des fractions partielles suivantes le seront également. Donc dans le cas $r=1$ les calculs de la présente méthode coïncident entièrement avec ceux de la seconde méthode.

V. Si r est plus grand que 1, l'expression (113.) donne *inmédiatement* les numérateurs des fractions partielles, et en cela la présente méthode diffère essentiellement de la seconde et la troisième où les numérateurs des fractions partielles ne se trouvent (69.) que par la voie des coefficiens indéterminés.

VI. Mais puisqu'il faut connaître les valeurs x_1, x , ... x_r de x qui rendent ${}^r\gamma$ égal à zéro (112.) pour calculer ${}^{r-1}w$ suivant la formule (113.), on voit qu'on n'évite pas les imaginaires s'il y en a dans les racines de

Digitized by Google

l'équation $y = 0$, quoique w soit réel. Mais on peut faire voir que $r^{-1}w$ est *nécessairement réel.*

VII. En effet quand il y a des racines imaginaires parmi celles de l'équation $y = 0$, elles ne peuvent se présenter, comme on sait, que *par couples* et elle seront toujours de la forme

116. $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$.

On tirera l'une de l'autre en écrivant seulement $-i$ à la place de $+i$.

Soient x_1 et x_2 deux racines *correspondantes* de l'équation $u = 0$, c'est à dire deux racines qui forment l'un des différens *couples* de racines, et soit

117. $\frac{y}{x - x_1} = \varkappa + \lambda i$,

il est clair qu'on aura

118. $\frac{y}{x - x_2} = \varkappa - \lambda i$,

car on tire $\frac{y}{x - x_2}$ de $\frac{y}{x - x_1}$ si l'on écrit $-i$ au lieu de $+i$; donc on aura aussi la valeur de $\frac{y}{x - x_2}$ si l'on écrit $-i$ au lieu de $+i$ dans $\varkappa + \lambda i$, valeur de $\frac{y}{x - x_1}$.

Par la même raison, si l'on suppose

119. $\left(\frac{y}{x - x_1}\right) = \delta + \varepsilon i$, ${}_1U = p + qi$, ${}_1N = \mu + \nu i$,

on aura

120. $\left(\frac{y}{x - x_2}\right) = \delta - \varepsilon i$, ${}_2U = p - qi$, ${}_2N = \mu - \nu i$.

Substituons les expressions (117. — 120.) dans les deux termes de l'expression $r^{-1}w$ (113.) correspondants aux deux racines x_1 et x_2, nous aurons

$$\frac{(p+qi)(\varkappa+\lambda i)}{(\mu+\nu i)(\delta+\varepsilon i)} + \frac{(p-qi)(\varkappa-\lambda i)}{(\mu-\nu i)(\delta-\varepsilon i)}$$

$$= \frac{(p\mu+q\mu i-p\nu i+q\nu)(\delta\varkappa+\delta\lambda i-\varepsilon\varkappa i+\varepsilon\lambda)+(p\mu-\mu qi+\nu pi+\nu q)(\delta\varkappa-\delta\lambda i+\varepsilon\varkappa i+\varepsilon\lambda)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{(p\mu+q\nu+(q\mu-p\nu)i)\,\delta\varkappa+\varepsilon\lambda+(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)i)+(p\mu+q\nu-(q\mu+p\nu)i)(\delta\varkappa+\varepsilon\lambda-(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)i)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)}$$

121. $$= \frac{2(p\mu+q\nu)(\delta\varkappa+\varepsilon\lambda)-2(q\mu-p\nu)(\delta\lambda-\varepsilon\varkappa)}{(\mu^2+\nu^2)(\delta^2+\varepsilon^2)},$$

et cela est une quantité *réelle.*

On trouvera également des quantités réelles en combinant par couples les autres termes de l'expression (113.) correspondants aux racines *correspondantes*, et si le nombre des racines est *impair*, une racine au moins est, comme on sait, nécessairement réelle.

Digitized by Google

Donc la quantité ^{r-1}w (113.) est toujours nécessairement réelle et la même chose a lieu pour les numérateurs des fractions partielles suivantes.

VIII. Mais quoique l'expression de ^{r-1}w (113.) puisse, comme nous venons de voir, être toujours transformée en une autre de la forme (121.) qui n'est composée que de quantités *réelles*, on n'est pas néanmoins dispensé du calcul des racines de l'équation $y = 0$ elles mêmes, car il faut connoître ces racines pour calculer les quantités p, q, μ, ν, $\varkappa$, λ, δ, ε.

IX. Nous n'appliquerons pas les formules de la méthode présente à nos deux exemples, parceque dans le cas $r = 1$ elles coïncident parfaitement avec celles de la seconde méthode et parceque dans les autres cas où $r > 1$ elles exigent toujours le calcul des racines de l'équation $y = 0$, lequel est embarrassant.

§. V. Cinquième méthode. La seconde d'Euler.

14.

Les seconde, troisième et quatrième méthodes de calculer les numérateurs des fractions partielles auxquelles la fraction donnée $\frac{^mU}{^ry^\varrho \cdot {}^sN}$ peut-être égalée, exigent le calcul des racines de l'équation $^ry = 0$. Cela ne rend pas seulement le calcul des numérateurs pénible, mais c'est aussi une véritable imperfection. Car la possibilité du calcul des numérateurs semble être par là *dépendante* de celle de la résolution de l'équation $y = 0$. C'est ce qu'elle n'est pas; car, comme la *première* méthode des coefficiens indéterminés le fait voir, le calcul des numérateurs des fractions partielles peut être *toujours* effectué *indépendamment* de la résolution des équations de degrés supérieurs au premier, et la difficulté du calcul n'augmente pas dans *la même proportion* que celle de la résolution des équations. Cela indique qu'en appelant au secours la résolution de l'équation $y = 0$, on fait quelque chose qui est *étranger* à la question.

Il y a donc à désirer une autre méthode plus expéditive que la *première*, mais, comme elle, *indépendante* de la *résolution des équations supérieures.*

Euler a donné le premier une telle méthode dans le mémoire cité plus haut. Voici en quoi elle consiste.

15.

1. Suivant le (§. 6.) on peut supposer

$$122. \quad \frac{^mU}{^ry^\varrho \cdot {}^sN} = \frac{^{r-1}w}{^ry^\varrho} + \frac{^{s-r-1}Z}{^ry^{\varrho-1} \cdot {}^sN},$$

Digitized by Google

ou bien aussi, si l'on veut réunir en un seul terme les ϱ premiers termes à droite dans (53.),

$$123. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N} = \frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{s-1}Z}{{}^{s}N}.$$

Multipliant (122. et 123.) par ${}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N$, elles donnent

$$124. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w.{}^{s}N + {}^{n-r-1}Z.{}^{r}y \text{ et}$$

$$125. \quad {}^{m}U = {}^{r\varrho-1}W.{}^{s}N + {}^{s-1}Z.{}^{r}y^{\varrho},$$

et de là on tire

$$126. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{m}U - {}^{n-r-1}Z.{}^{t}y}{{}^{s}N} \text{ et}$$

$$127. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{m}U - {}^{s-1}Z.{}^{r}y^{\varrho}}{{}^{s}N}.$$

II. Si dans ces expressions on fait

$$128. \quad {}^{r}y = 0 \quad \text{et} \quad {}^{r}y^{\varrho} = 0,$$

elles se réduisent à

$$129. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} \text{ et}$$

$$130. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N}.$$

III. En donnant à x les $r-1$ valeurs différentes exprimées par la première des équations (128.), on tombe dans le calcul des méthodes précédentes et dans toutes leurs difficultés. Pour les éviter Euler se sert des équations (128.), non pour chasser *tous* les x des quantités U et N dans (129. et 130.) *mais seulement pour en éliminer les puissances de x supérieures respectivement à la $r-1^{\text{me}}$ et à la $r\varrho-1^{\text{me}}$.*

IV. Il fait cela en tirant des équations

$$131. \quad {}^{r}y = x^{r} + \tau_1 x^{r-1} + \tau_2 x^{r-2} \ldots + \tau_r = 0,$$

$$132. \quad {}^{r}y^{\varrho} = x^{r\varrho} + \eta_1 x^{r\varrho-1} + \eta_2 x^{r\varrho-2} \ldots + \eta_{r\varrho} = 0,$$

les *plus hautes* puissances de x. Ces équations donnent

$$133. \quad x^{r} = -(\tau_1 x^{r-1} + \tau_2 x^{r-2} \ldots + \tau_r)$$

$$134. \quad x^{r\varrho} = -(\eta_1 x^{r\varrho-1} + \eta_2 x^{r\varrho-2} \ldots + \eta_{r\varrho}),$$

et l'on voit aisément qu'à l'aide de ces formules, on peut exprimer *toutes* les puissances de x supérieures à la $r-1^{\text{me}}$ et à la $r\varrho-1^{\text{me}}$, par les puissances inférieures de cette quantité. Par exemple l'équation (133.) donne

$$x^{r+1} = -(\tau_1 x^{r} + \tau_2 x^{r-1} \ldots + \tau_r x),$$

ou bien

$$135. \quad x^{r+1} = \begin{cases} +\tau_1^2 x^{r-1} + \tau_1\tau_2 x^{r-2} + \tau_1\tau_3 x^{r-3} \ldots + \tau_1\tau_r \\ -\tau_2 x^{r-2} - \tau_3 x^{r-3} \ldots \ldots \ldots - \tau_r x, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Digitized by Google

V. On peut donc réduire les expressions (129. et 130.) à d'autres de la forme

$$136. \quad {}^{r-1}w = \frac{{}^{r-1}U}{{}^{r-1}N},$$

$$137. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{r\varrho-1}U}{{}^{r\varrho-1}N},$$

qui ne contiennent plus des puissances de x *supérieures* à la $r-1^{\text{me}}$ ou à la $r\varrho-1^{\text{me}}$, ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

VI. Mais les expressions (136. et 137.) de w et W sont *fractionnaires;* cependant elles doivent être nécessairement *entières* (122. et 123.). Donc il s'agit encore de les transformer en d'autres qui, dans leurs *dénominateurs*, ne présentent que des quantités indépendentes de x. Euler donne deux méthodes différentes pour effectuer cette transformation.

VII. *La première méthode* s'exécute à l'aide de l'équation

$$138. \quad \frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}.$$

Cette équation est *identique*, car elle donne en multipliant par croix

$$139. \quad \begin{cases} \alpha pq - \beta ps = \alpha pq - \beta rq, & \text{ou bien } ps = rq, \\ \alpha rq - \beta rs = \alpha ps - \beta rs, & \text{ou bien } rq = ps, \end{cases}$$

comme cela doit être.

VIII. Cela posé, multiplions par ex. dans (136.) ${}^{r-1}U$ et ${}^{r-1}N$ par x, ce qui ne changera pas la valeur de ${}^{r-1}w$, et éliminons des produits à l'aide de l'équation (133.) la puissance x^r, nous aurons une *seconde* expression de ${}^{r-1}w$ différente de celle (136.) mais semblable à elle en ce que x ne s'élève pas non plus au dessus de la puissance x^{r-1} ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

Traitons la *seconde* expression de ${}^{r-1}w$ précisément de la même manière que la première, et nous aurons une *troisième* expression semblable de ${}^{r-1}w$.

Continuons de cette manière en calculant $r-1$ différentes expressions de ${}^{r-1}w$ qui toutes ne contiendront quelque puissance de x supérieure à la $r-1^{\text{me}}$ ni dans le numérateur ni dans le dénominateur.

IX. Toutes ces formules, exprimant la même quantité ${}^{r-1}w$, seront des fractions de valeur *égale*, comme l'étaient ci-dessus celles $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ (138.). Donc on pourra y appliquer l'équation (138.). Multiplions donc la *première* expression de ${}^{r-1}w$, que nous représenterons par $\frac{P}{Q}$, en haut

Digitized by Google

et en bas par le coefficient α dont x^{r-1} dans le *dénominateur* de la *seconde* expression $\frac{r}{s}$ est affecté, et réciproquement la *seconde* expression $\frac{r}{s}$ de ^{r-1}w en haut et en bas par le coefficient β de x^{r-1} dans le *dénominateur* de la *première* expression $\frac{p}{q}$, nous aurons deux expressions de ^{r-1}w dans les dénominateurs desquelles x^{r-1} aura *le même* coefficient. Maintenant les deux expressions $\frac{\alpha p}{\alpha q}$ et $\frac{\beta r}{\beta s}$ égales entre elles, seront aussi en vertu de (138.) égales à $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$. Mais le coefficient de x^{r-1} dans le dénominateur αq de la fraction $\frac{\alpha p}{\alpha q}$ étoit *égal* à celui de x^{r-1} dans le dénominateur βs de la fraction $\frac{\beta r}{\beta s}$, dont la puissance x^{r-1} sera *détruite* dans l'expression $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$ et nous aurons transformé les deux expressions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ de ^{r-1}w en une autre $\frac{\alpha p - \beta r}{\alpha q - \beta s}$ *où x ne s'élève plus qu'à la puissance x^{r-2} dans le dénominateur.*

X. Combinons de cette manière deux à deux toutes les $r-1$ différentes expressions de ^{r-1}w trouvées (VIII.), et nous en tirerons $r-2$ différentes expressions équivalentes de ^{r-1}w qui toutes *ne contiendront dans le dénominateur aucune puissance de x supérieure à la $r-2^{me}$.*

XI. Combinons de nouveau deux à deux ces $r-2$ expressions et nous trouverons $r-3$ expressions de ^{r-1}w dans les dénominateurs desquelles *x ne s'élève qu'à la puissance $r-3$.*

XII. En continuant ce calcul, où il y a encore à observer que les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, quand il s'en présente, *ne doivent pas être supprimés*, on voit qu'on finira par arriver à *une* expression de ^{r-1}w qui n'a aucun x dans le dénominateur, et cette expression est celle qu'on a desirée (VI.).

XIII. *La seconde méthode* part de la proposition, que si U, N et y sont trois polynomes quelconques de x, il existe toujours un polynome M de x qui, étant pris pour multiplicateur de U et N, réduit la fraction $\frac{U}{N}$ à la forme

$$140. \quad \frac{U}{N} = \frac{UM}{NM} = \frac{Py+K}{Qy+C},$$

où C ne contient plus x, de sorte qu'à l'aide du multiplicateur M on pourra transformer sur le champ les expressions de ^{r-1}w et ^{r-1}W en

Digitized by Google

d'autres de la forme $\frac{Py+K}{Qy+C}$ et $\frac{Py^\varrho+K}{Qy^\varrho+C}$ qui pour $y=0$ et $y^\varrho=0$ se réduisent à

141. $$\frac{U}{N}=\frac{K}{C}={}^{r-1}w \text{ ou } {}^{r\varrho-1}W,$$

expression qui a la forme demandée, puisqu'elle ne contient plus x dans le dénominateur.

XIV. Il s'agit de trouver le multiplicateur M. Pour cela Euler donne la règle suivante." Soit $N=Qy+L_0$; développez $\frac{y}{L_0}$ en *fraction continue*, en vous arrêtant aussitôt que se présente un reste indépendant de x. Calculez la valeur en x de cette fraction continue après y avoir supprimé la dernière partie fractionnaire, et le *numérateur* de la fraction que vous trouverez sera le multiplicateur cherché."

XV. Ayant trouvé par l'une ou l'autre des deux méthodes les expressions polynomes *entières* de ${}^{r-1}w$ ou ${}^{r\varrho-1}W$ (129. et 130.) les équations (124. et 125.) donneront

142. $${}^{n-r-1}Z=\frac{{}^{m}U-{}^{r-1}w.{}^{s}N}{{}^{r}y} \text{ et}$$

143. $${}^{n-1}Z=\frac{{}^{m}U-{}^{r\varrho-1}W.{}^{s}N}{{}^{r}y^\varrho},$$

et ayant calculé Z suivant ces équations, on peut décomposer ultérieurement les fractions $\frac{{}^{n-r-1}Z}{{}^{r}y^{\varrho-1}.{}^{s}N}$ et $\frac{{}^{n-1}Z}{{}^{s}N}$ par le même procédé qu'on a appliqué à $\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N}$. Ou bien on peut tirer directement de $\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho}.{}^{s}N}$ le numérateur Z de le seconde fraction partielle (122. et 123.) Y par la même opération qui a donné le numérateur w ou W de la première fraction partielle. C'est ce que fait Euler.

16.

Voici en quoi consiste la méthode d'Euler qui, comme on voit, évite en effet la résolution de l'équation $y=0$ et qui pour cela est déjà préférable aux méthodes décrites ci-dessus.

Les règles et préceptes que donne Euler sont parfaitement bons et exacts, mais il faut avouer que l'illustre auteur a presque entièrement supprimé les *démonstrations* de ses règles.

D'abord on ne voit pas par quel droit on puisse supposer arbitrairement $y=0$, *sans donner à tous les x qui entrent en calcul les va-*

Digitized by Google

leurs déterminées que fixe l'équation supposée (No. 15. III.). C'est autre chose dans les trois méthodes précédentes. Il est vrai qu'on y suppose également $y = 0$, mais on donne effectivement à *tous* les x les valeurs déterminées par l'équation supposée. Euler se contente de *dire* (§. 7. de son mémoire) que si l'on fait $y = 0$, les expressions (126. et 127.) se réduisent à celles (129. et 130.) et qu'il ne reste qu'à transformer ces expressions *fractionnaires* en formules *entières*. Mais il paroît que l'exactitude des résultats qu'on trouve par cette élimination *non totale* mais seulement *partielle*, de x, a besoin d'être verifiée.

En second lieu, pour faire voir l'existence du multiplicateur M (§. 15. XIII.) propre à donner à une fraction $\frac{U}{N}$ la forme $\frac{Py+K}{Qy+C}$, Euler a recours à la méthode des coefficiens indéterminés. Mais cette méthode ne paraît pas offrir de démonstration rigoureuse, parcequ'on n'est pas sûr que parmi les équations déterminantes il n'y en ait pas d'identiques.

En troisième lieu les *considérations* sur lesquelles Euler fonde sa *règle* de trouver le multiplicateur M (§. 15. XIV.) semblent être plutôt spécieuses que propres à servir de fondemens d'une démonstration rigoureuse. Voici comment il s'exprime sur ce sujet:

„§. 16. Postquam perventum fuerit ad aequalitatem $\frac{U}{N}$, (nous mettons nos signes, mais nous copions les mots d'Euler) ubi omnes ipsius x potestates jam sint minores quam in ipso denominatore y, singularis se mihi obtulit via, multiplicatorem illum supra memoratum eruendi, qui si litera M designetur, habebimus $\omega = \frac{U.M}{N.M}$. Jam quia requiritur ut posito $y = 0$ iste denominator evadat quantitas constans, hoc eveniet statuendo $NM = yQ + C$. Sic enim ratione habita aequationis $y = 0$, utique fiet $\omega = \frac{UM}{C}$; sicque ista littera per functionem integram ipsius x exprimetur, postquam scilicet ex numeratore UM altiores potestates fuerint exclusae."

„§. 17. Nunc ad istas quantitates M et Q inveniendas, evidens est, si quantitas variabilis x *ut infinita spectetur*, tum fore $NM = yQ$, ideoque $\frac{M}{Q} = \frac{y}{N}$; unde patet, fractionem $\frac{M}{Q}$ *proxime aequalem* esse debere fractioni $\frac{y}{N}$. *Hic igitur in subsidium vocare conveniet* eandem opera-

Digitized by Google

tionem, quae in numeris institui solet quando fractione quacunque proposita alia ipsi *proxime aequalis* quaeritur. Simili enim modo, quantitate y per N divisa, residuum sumatur pro divisore, praecedens vero divisor pro dividendo; hocque modo procedatur, donec ad quotos fractos perveniatur, in quorum scilicet denominatore ipsa quantitas x inest. Tum enim si more solito ex quotis repertis fractiones formentur, ea quae ultimo quoto integro respondet, nobis exhibebit ipsam fractionem $\frac{M}{Q}$, ex qua deinceps, numeratoribus et denominatoribus seorsim aequatis, numerator w facili negotio eruitur."

Certes on ne voit pas par quel droit on puisse supposer $x = \infty$ et après tirer quelques conclusions de l'expression $\frac{y}{N}$. La quantité $\frac{y}{N}$ est zéro ou infinie pour $x = \infty$, selon que le degré de x dans N est plus grand ou plus petit que celui dans y, et une quantité zero ou infinie ne peut être regardée comme *rapprochée* d'une autre. Et même si cela était, on ne voit pas, quelle ressemblance il y a entre les quantités en question et les fractions en nombres. Il est vrai que, en développant en fraction continue une fraction en nombres, la dernière fraction *convergente* est *moins différente* de la fraction proposée qu'aucune autre fraction en nombres *plus petits*. Mais ici il ne s'agit pas de la *grandeur* des quantités. Elles sont plutôt *indéterminées*, et x peut même être regardé comme variable. Il ne s'agit que de la *dépendance* ou de *l'indépendance* de x des autres quantités. Il paraît donc que la ressemblance du cas actuel avec celui des fractions continues en nombres, n'est pas telle qu'on puisse y fonder la règle énoncée. Le cas actuel paraît être un de ceux qui ne sont pas rares dans les ouvrages d'Euler, où ce grand homme, au lieu de calculer et de démontrer les résultats, les a pour ainsi dire plutôt devinés ou pressentis par une sorte d'inspiration mathématique.

Pour justifier et verifier l'excellente méthode d'Euler, il reste donc à *démontrer* rigoureusement ses règles. C'est ce qui se peut faire effectivement et que nous ferons. Je me suis déjà occupé autrefois d'une partie de ces démonstrations dans un mémoire lû à l'académie des sciences de Berlin le 24. février 1831; mais je vais reprendre ici cette tâche, en essayant de perfectionner et de compléter ce qu'il y a à faire.

Digitized by Google.

17.

Nous commencerons par démontrer la proposition (No. 15. XIII.) savoir que,

si ${}^mU$, ${}^sN$ et ${}^r\gamma$ sont trois polynomes quelconques de x, il existe toujours un polynome M de x, qui étant pris pour multiplicateur de U et N, réduit la fraction $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ à la forme $\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mUM}{{}^sNM} = \frac{P.{}^r\gamma+K}{Q.{}^r\gamma+{}^oC}$,

où C ne contient point x.

I. Il est clair qu'il ne s'agit que de démontrer qu'il existe toujours un multiplicateur M pour un polynome quelconque donnée ${}^sN$ qui donne

144. $$M.{}^sN = Q.{}^r\gamma + {}^oC,$$

où ${}^oC$ ne contient point x. Car en multipliant ${}^mU$ par le même polynome M, on aura

145. $$M.{}^mU = P.{}^r\gamma + K,$$

où le degré de K est entre 0 et r, et la fraction $\frac{MU}{MN}$ est identiquement égale à la fraction donnée $\frac{U}{N}$.

II. Supposons donc ${}^sN$ divisé par ${}^r\gamma$, on pourra écrire généralement

146. $$ {}^sN = Q_o.{}^r\gamma + {}^\lambda L_o.$$

Si s est $>r$, λ sera entre 0 et r, et si $s<r$, λ sera $=s$.

III. Multiplions ${}^\lambda L_o$ par une puissance x^{ν_1} de x propre à introduire dans $x^\nu.{}^\lambda L_o$ la puissances x^r de x. Divisons ensuite le produit $x^r.{}^\lambda L_o$ par ${}^r\gamma$, on aura

147. $$x^\nu.{}^\lambda L_o = q_o.\gamma + {}^{\lambda_1}L_1.$$

Si peut-être λ^1 n'était pas $=r-1$, mais inférieur à $r-1$ (λ_1 ne peut être plus grand que $r-1$), il n'y a qu'à multiplier (142.) encore par $x^{r-1-\lambda_1}$ pour avoir

148. $$x^{\nu_1}.{}^\lambda L_o = {}^1q_o.{}^r\gamma + {}^{r-1}L_1,$$

ν_1 étant $= +\nu-1-\lambda_1$.

On peut donc toujours faire ensorte que ${}^\lambda L_o$ multiplié par une puissance convenable x^{r_1} de x ait la forme ${}^1p_o.{}^r\gamma + {}^{r-1}L_1$, où L contient *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

IV. Cela posé, multiplions (146.) par x^{ν_1}, nous aurons

149. $$x^{\nu_1}.{}^sN = Q_o x^{\nu_1}.{}^r\gamma + {}^\lambda L_o x^{\nu_1}.$$

En y substituant (148.), on aura

150. $$x^{\nu_1}.{}^sN = (Q_o x^{\nu_1} + {}^1q_o){}^r\gamma + {}^{r-1}L_1$$

Digitized by Google

et en écrivant Q_1 au lieu de $Q_0.x^{\nu_1} + q_0$,

$$151. \quad x^{\nu_1}.{}^sN = Q_1.{}^ry + {}^{r-1}L_1,$$

où la partie ${}^{r-1}L_0$ non comprise sous le produit $Q_1.y$ renfermera *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

V. Multiplions de nouveau ${}^{r-1}L_1$ par x et divisons le produit $x.{}^{r-1}L_1$ par ${}^ry$, nous aurons

$$152. \quad x.{}^{r-1}L_1 = q_1.{}^ry + {}^{\lambda_2}L_2.$$

Si λ_2 étoit inférieur à $r-1$ (il n'y peut être supérieur) il n'y a qu'à multiplier (152.) par $x^{r-1-\lambda_2}$ pour avoir

$$153. \quad x^{\mu_1}.{}^{r-1}L_1 = q_1.{}^ry + {}^{r-1}L_2,$$

où $\mu_1 = 1 + r - 1 - \lambda_2 = r - \lambda_2$.

Multiplions maintenant (151.) par L^1 on aura un produit de la forme

$$154. \quad x^{\nu_2}.{}^sN = Q_1.x^{\mu_1}.{}^ry + {}^{r-1}L_1.x^{\mu_1},$$

où $\nu^0 = \nu_2 + \mu_1$, et en y substant (153.)

$$154.* \quad x^{\nu_2}.{}^sN = (Q_1.x^{\mu_1} + q_1)y + {}^{r-1}L_2.$$

Ecrivant enfin Q_2 au lieu de $Q_1.x^{\mu_2} + q_2$, on aura

$$155. \quad x^{\nu_2}.{}^sN = Q_2.{}^ry + {}^{r-1}L_2,$$

où ${}^{r-1}L_2$ renfermera *nécessairement* la puissance x^{r-1} de x.

VI. Voilà donc deux expressions différentes (151. et 155.) qui toutes les deux ont à gauche ${}^sN$ pour facteur, et à droite une partie affectée du facteur ${}^ry$ et une autre renfermant *néseseairement* la puissance x^{r-1} de x.

VII. En opérent de nouveau sur l'expression (155.) précisément de la même manière qu'on là fait sur l'expression (151.) on aura une *troisième* expression semblable aux deux précédentes, et en réitérant l'opération sur celle-ci, une quatrième etc.

Ayant répété $n-1$ fois l'opération indiquée on aura $r-1$ expressions différentes de la forme

$$156. \quad x^{\nu}.{}^sN = (Q){}^ry + {}^{r-1}(L).$$

VII. Soit α_1 le coefficient de x^{r-1} dans ${}^{r-1}L_1$ (151.) et α_2 celui de x^{r-1} dans ${}^{r-1}L_2$ (155.). Multiplions (151.) par α_2 et (155.) par α_1 et soustrayons les produits, nous aurons une expression de la forme

$$157. \quad (\alpha_2.x^{\nu_2} - \alpha_1.x^{\nu_1}){}^sN = {}_1Q_1.{}^ry + {}^{r-1}{}_1L_2,$$

la puissance x^{r-1} ayant été éliminée de la partie L.

IX. Combinant de cette sorte les $r-1$ expressions (156.) deux à deux, nous aurons $r-2$ expressions de la forme

Digitized by Google

157. $m_1 . {}^sN = ({}_1Q) . {}^ry + {}^{r-s}(L),$

où m_1 est un polynome de x et où dans la partie L la quantité x ne s'élève qu'à la puissance x^{r-s}.

X. Combinons de nouveau deux à deux les $r-2$ expressions (157.) en multipliant la première des deux par le coefficient de x^{r-s} dans la partie L de la seconde et celle-ci par le coefficient de x^{r-s} dans la partie L de la première, nous aurons $r-3$ expressions de la forme

157.* $m_2 . {}^sN = ({}_2Q) {}^ry + {}^{r-3}(L).$

XI. En continuant ces combinaisons, il est clair qu'on arrivera enfin à une expression qui, dans la partie L, ne contient plus x et qui est de la forme

158. $M . {}^sN = Q . {}^ry + {}^oC,$

forme égale à celle (144.).

XII. Il a donc été démontré qu'il existe toujours un polynome M de x qui, multiplié par le polynome donnée ${}^sN$, produit une quantité $M . {}^sN$ de la forme $Q . {}^ry + {}^oC$.

XIII. Si donc on multiplie par ce même polynome M l'autre polynome donné ${}^mU$, ce qui donnera un produit de la forme

159. $M . {}^mU = P . {}^ry + K,$

la fraction proposée $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ sera réduite à la forme

160. $\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{M . {}^mU}{M . {}^sN} = \frac{P . {}^ry + K}{Q . {}^ry + {}^oC},$

où ${}^oC$ ne contient plus x_1. C'est ce qu'il s'agissait de vérifier

XIV. On verra plus bas (20. XIII.) qu'une autre démonstration de l'existence du multiplicateur M est contenue dans celle de la règle donnée par Euler pour le calcul du multiplicateur même.

18.

Maintenant nous démontrerons

qu'on trouve, par ex. dans (122.), la valeur de w en x si, suivant les règles d'Euler, on élimine d'abord de U et N, au moyen de l'équation $y = 0$, les puissances de x supérieures à la $r-1^{\text{me}}$ et si ensuite on chasse, par ex. à l'aide du procédé (§. 15. VII. — XII.), x absolument du dénominateur de la fraction qu'on a d'abord obtenue.

I. Ayant démontré (§. 17.) qu'il existe toujours un polynome M qui donne

161. $\begin{cases} M . {}^mU = Py + K \text{ et} \\ M . {}^sN = Qy + {}^oC, \end{cases}$

Digitized by Google

où $^{\circ}C$ ne contient pas x, nous pourrons au lieu de l'équation

$$162. \quad \frac{^{m}U}{^{s}N} = {}^{r-1}w + \frac{^{n-r-1}Z.{}^{r}y}{^{s}N},$$

qu'on tire de (122.) en multipliant par $^{r}y^{\varrho}$, écrire l'expression suivante:

$$163. \quad \frac{^{m}U.M}{^{s}N.M} = \frac{Py+{}^{r-1}K}{Qy+{}^{\circ}C} = {}^{r-1}w + \frac{^{n-r-1}Z.{}^{r}y.M}{^{s}N.M}.$$

II. Multipliant cette équation par $Qy+{}^{\circ}C = M.{}^{s}N$ (161.), on aura

$$164. \quad Py+K = {}^{r-1}w(Qy+{}^{\circ}C)+Zy\,M,$$

et de là on tire

$$165. \quad (P-{}^{r-1}wQ-ZM)\,{}^{r}y = {}^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K.$$

III. Le terme à gauche de cette équation est *divisible* par ^{r}y; il faut donc que le terme $^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ le soit également. Mais cela est impossible, à moins que $^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ ne soit zéro; car K est tout au plus du degré $r-1$, C est du degré 0 et w est du degré $r-1$ tout au plus, comme le fait voir l'équation (5.) démontrée ci-dessus. Donc le dividende $^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ est tout au plus du degré $r-1$; le diviseur ^{r}y au contraire est du degré r, et il est impossible qu'un polynome en x du degré $r-1$ soit *divisible* par un autre polynome du degré r. Il faut donc que $^{r-1}w.{}^{\circ}C-{}^{r-1}K$ *soit zéro* et cela donne

$$166. \quad {}^{r-1}w = \frac{^{r-1}K}{^{\circ}C}.$$

Voilà la véritable valeur de ^{r-1}w. On voit que cette valeur s'exprime par les *restes* de la division de MU et MN par y seulement, qui suivant les formules (163.) ou (160.) sont K et $^{\circ}C$. Les *quotiens* de la division, qui sont P et Q, n'y influent pas.

IV. Cela posé, remarquons que nous somme parvenus de N à $Qy+{}^{\circ}C = MN$ (160.) en *divisant* d'abord N par y; cela nous a donné le *reste* L_0 (146.) ensuite nous avons formé d'autres expressions de la forme $(Q)y+(L)$, en multipliant par des puissances de x et en *divisant* toujours par y. Ces expressions, en les combinant par la soustraction ou addition, nous ont enfin conduit à l'expression $MN = Qy+{}^{\circ}C$, et en *divisant* MU également par y, à l'expression finale $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$ de $\frac{U}{N}$. C'est donc *la division par* y des numérateurs et dénominateurs d'une expression fractionnaire identique avec $\frac{U}{N}$ qui nous a fourni l'expression finale.

V. Mais il est clair que s'il ne s'agit que du *reste* de la division d'un polynome quelconque en x, T par exemple, par un autre polynome

Digitized by Google

^{r}y de degré r, comme dans notre cas, on trouvera le même résultat si, au lieu de diviser T par y, on élimine de T, au moyen de l'équation $y=0$ *supposée arbitrairement*, les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$. En effet, si l'on désigne par p le *quotient* de la division de T par y et par R le reste, on peut exprimer T par

$$167. \quad T = p.{}^{r}y + {}^{r-1}R.$$

Cette expression se réduit à $T_{,}={}^{r-1}R$ si l'on fait $y=0$; donc aussi T se réduira à ^{r-1}R si on le combine avec l'équation $y=0$ en en éliminant, au moyen de cette équation, les puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$.

VI. Donc si au lieu des *divisions* à faire dans les opérations ci-dessus, pour trouver $Py+K=MU$ et $Qy+{}^{s}C=MN$, et dont le resumé a été énoncé (IV.) on se sert autant de fois de *l'élimination* des puissances de x supérieures à la $r-1^{me}$ au moyen de l'équation $^{r}y=0$, en conservant d'ailleurs tous les autres calculs, on aura encore les *mêmes restes* pour résultats. Ayant donc chassé tous les x du dénominateur de l'expression identique de $\frac{U}{N}$, on aura pour résultats finals les *mêmes restes* ^{r-1}K et ^{s}C qu'on a trouvés par les procédés ci-dessus. Et puisque ces restes, comme il a été demontré plus haut, donnent la véritable valeur $\frac{K}{C}$ de w (166.), on trouvera aussi cette véritable valeur en se servant de l'élimination partielle de x au lieu de la division, comme le fait **Euler**. Donc le procédé d'Euler est justifie par là.

19.

On peut encore justifier directement ce procédé d'**Euler** par la réflexion suivante.

I. L'équation

$$168. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = {}^{r-1}w + \frac{{}^{n-r-1}Z.{}^{r}y}{{}^{s}N} \quad (162.)$$

est supposée avoir lieu pour une valeur *quelconque* de x, et de sorte que les *coefficiens* des différents polynomes U, N, w, Z, y de x qui s'y présentent, comme étant regardées *indépendants* de x, doivent conserver les *mêmes* valeurs pendant que la valeur de x varie.

II. On peut donc donner à x toute valeur qu'on voudra, sans que celles des *coefficiens* changent; et les valeurs des coefficients *indéterminés* de w et Z qu'on trouve avoir lieu pour quelque valeur *déterminée* de x, auront lieu également pour *toute autre* valeur de x.

Digitized by Google

III. Par exemple on peut supposer $x = 0$. Cela donnera une équation entre les coefficiens de x^0 dans les différents polynomes. Et les valeurs de ces coefficients, qu'on pourroit tirer de cette équation, auraient lieu également pour une valeur quelconque de x. Elles seraient les valeurs que les coefficiens de x^0 ont effectivement dans l'équation (168.).

IV. Maintenant tout le problème se réduit à celui de trouver les *coefficiens indéterminés ou inconnus* des deux polynomes w et Z, car, ces coefficiens étant déterminés, la décomposition demandée de la fraction proposée $\frac{U}{N}$ est consommée. Il ne s'agit donc que d'assigner à x quelque valeur qui puisse conduire à ce but.

V. La valeur 0 de x, prise pour exemple en (III.), n'est pas généralement propre à cela, car si w et Z contiennent la puissance x^0 de x tous les deux, on n'aura qu'une seule équation entre les deux coefficiens inconnus de x^0 dans w et Z. Et d'ailleurs cette valeur de x ne donne pas en même tems quelque relation entre les coefficiens des autres puissances de x.

Dans les méthodes de décomposition des fractions ci-dessus (No. 2. 3. 4.) on donne à x les r différentes valeurs déterminées, que prescrit l'équation $y = 0$ supposée arbitrairement. On en tire effectivement les valeurs de tous les coefficiens indéterminés, parcequ'on a autant d'équations déterminantes qu'il y a de coefficiens inconnus *dans* ${}^{r-1}w$, l'autre terme $\frac{Zy}{N}$ à gauche dans (171.) étant zéro à cause de $y = 0$. Mais ce moyen a l'inconvient de necessiter la résolution de l'équation $y = 0$, pour avoir les valeurs de x déterminées qu'elle prescrit, et après le calcul des imaginaires qui peuvent se présenter.

VII. Au lieu de cela on vient directement au but en supposant encore arbitrairement ${}^{r}y = 0$, ce qui réduit d'abord l'équation (168.) à

$$169. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = {}^{r-1}w,$$

mais en éliminant ensuite des polynomes U, N, w *seulement les puissances de* x *supérieurs à la* $r-1^{\text{me}}$, au lieu d'en chasseur *tous* les x. L'expression de $\frac{U}{N}$ qu'on aura trouvé en chassant de U et N les puissances de x supérieures à la $r-1^{\text{me}}$ au moyen de l'équation ${}^{r}y = 0$ se présentera d'abord sous une forme *fractionnaire*; mais aussitôt qu'on sera parvenu à la transformer en une autre *entière* du degré $r-1$, encore au

Digitized by Google

moyen de l'équation $y = 0$, ce qui se fait par le procédé (§. 14. VII. XII.), cette expression, dont tous les coefficiens sont connus, sera celle de ^{r-1}w même, qui est également du degré $r-1$. Donc on aura trouvé d'un seul coup tous le coefficiens de ^{r-1}w qui étaient inconnus et qu'on cherchait. Il est vrai que dans l'expression finale, ainsi que déjà dans celle (172.), x ne peut avoir que les valeurs *déterminées* qui conviennent à l'équation $y = 0$, et non une valeur quelconque. Mais cela ne diminue en rien l'exactitude du résultat, puisque les mêmes valeurs des coefficients des polynomes dans (168.) qui conviennent à quelques valeurs *déterminées* de x, conviennent également, comme nous l'avons remarqué (I.) à toute autre valeur.

VIII. Le procède d'Euler se trouve comme on voit également, justifié par les reflexions précédentes, et ce sont peut être elles qu'Euler a eues en vue sans les énoncer. Mais d'ailleurs la démonstration actuelle de sa méthode, quoique beaucoup plus succincte, semble être moins élémentaire que celle (§. 17. et 18.).

20.

Nous venons à la démonstration de la règle du calcul du multiplicateur M propre à transformer une fraction donnée $\frac{^mU}{^nN}$ en $\frac{M.^mU}{M.^nU} = \frac{Py+K}{Qy+^\circ C}$, où C ne contient plus x, règle donnée par Euler et énoncée (§. 15. XIV.).

I. Divisons d'abord ^mU et ^nN par ^ry et supposons

$$170. \quad {}^mU = P_\circ.{}^ry + {}^\lambda K_\circ,$$

$$171. \quad {}^nN = Q_\circ.{}^ry + {}^\lambda L_\circ.$$

Il est clair que les degrés $\varkappa$ et λ des *restes* $K_\circ$ et $L_\circ$ seront toujours moindres que les degré r du diviseur y, au moins d'une unité. Donc on peut supposer

$$172. \quad y = {}_mL_\circ + R_\circ,$$

où m et $R_\circ$ seront des polynomes en x.

II. Mais le degré du reste $R_\circ$ est de nouveau nécessairement inférieur à celui de $L_\circ$, au moins d'une unité; donc on peut supposer

$$173. \quad L_\circ = rR_\circ + R_1$$

Ici le degré de R_1 est inférieur à celui de $R_\circ$, au moins d'une unité, et on aura

$$174. \quad R_\circ = r_1.R + R_2.$$

En continuant on pourra supposer

Digitized by Google

$$175. \quad \begin{cases} R_1 = r_2 . R_2 + R_3 \\ R_2 = r_3 . R_3 + R_4 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

et généralement

$$176. \quad R^{n-1} = r_n . R_n + R_{n+1}.$$

III. Les dégrés des restes R_0, R_1, R_2.... diminuant toujours au moins d'une unité, il faut nécessairement qu'on arrive enfin à un reste *dont le degré soit zéro*, c'est-à-dire *indépendant de x*. Nous supposons que R_{n+1} soit ce reste.

IV. Cela posé les expressions (172. et 173.) donnent

$$177. \quad \frac{\gamma}{L_0} = \frac{m(rR_0 + R_1) + R_2}{rR_0 + R_1} = \frac{(mr+1)R_0 + R_1}{rR_0 + R_1}.$$

V. En substituant dans cette expression celle de R_0 (174.), on voit qu'on aura une fraction qui a R_1 et R_2 également dans son numérateur et dans son dénominateur, mais point des termes ni dans l'un ni dans l'autre qui ne soient affectés de R_1 ou de R_2. En substituant dans cette fraction la valeur de R_1 (175.) on aura une autre fraction semblable contenant R_2 et R_3 tant dans le numérateur que dans le dénominateur, et ainsi de suite. Généralement on pourra donc écrire

$$178. \quad \frac{\gamma}{L_0} = \frac{p_{n-1} R_{n-1} + \varkappa_{n-1} R_n}{q_{n-1} R_{n-1} + \lambda_{n-1} R_n},$$

où p_{n-1}, $\varkappa_{n-1}$, q_{n-1}, λ_{n-1} sont les coefficiens inconnus de R_{n-1} et R_n.

VI. Substituant maintenant dans l'expression générale (178.) celle de R_{n-1} (176.), on aura

$$179. \quad \frac{\gamma}{L_0} = \frac{p_{n-1}(r_n R_n + R_{n+1}) + \varkappa_{n-1} R_n}{q_{n-1}(r_n R_n + R_{n+1}) + \lambda_{n-1} R_n} = \frac{(p_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1}) R_n + p_{n-1} R_{n+1}}{(q_{n-1} r_n + \lambda_{n-1}) R_n + q_{n-1} R_{n+1}}.$$

Mais en vertu de l'expression générale (178.), on a aussi

$$180. \quad \frac{\gamma}{L_0} = \frac{p_n R_n + \varkappa_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{n+1}}.$$

On a donc, en comparant les expressions (179. 180.),

$$181. \quad \begin{cases} p_n = p_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1}, \\ q_n = q_{n-1} r_n + \lambda_{n-1}, \\ \varkappa_n = p_{n-1}, \\ \lambda_n = q_{n-1}. \end{cases}$$

VII. Ces équations donnent

$$p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n = p_{n-1} q_{n-1} r_n + \varkappa_{n-1} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-1} r_n - p_{n-1} \lambda_{n-1},$$

ou bien

$$182. \quad p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n = -(p_{n-1} \lambda_{n-1} - q_{n-1} \varkappa_{n-1}).$$

Digitized by Google

En mettant dans cette équation à plusieurs reprises $n-1$ à la place de n on aura

183. $$p_n\lambda_n - q_n x_n = -(p_{n-1}\lambda_{n-1} - q_{n-1}x_{n-1}) = +(p_{n-2}\lambda_{n-2} - q_{n-2}x_{n-2}) = -(p_{n-3}\lambda_{n-3} - q_{n-3}x_{n-3})$$

et enfin

184. $$p_n\lambda_n - q_n x_n = \pm(p_0\lambda_0 - q_0 x_0)$$

VIII. Mais, en fesant $n=1$ dans l'expression générale (178.), elle donne

185. $$\frac{\gamma}{L_0} = \frac{p_0 R_0 + x_0 R_1}{q_0 R_0 + \lambda_0 R_1}.$$

En comparant cette équation avec celle (177.) on voit que

186. $$p_0 = mr+1; \quad q_0 = r; \quad x_0 = m; \quad \lambda_0 = 1.$$

En substituant ces valeurs de p_0, q_0, x_0 et λ_0 dans (184.) on trouve

187. $$p_n\lambda_n - q_n x_n = \pm((mr+1)1 - rm) = \pm 1.$$

IX. Cela posé, l'expression (172.) donne d'abord $\frac{\gamma}{L_0} = m + \frac{R_0}{L_0}$. En y substituant la valeur de L_0 (173.) on a

$$\frac{\gamma}{L_0} = m + \frac{R_0}{rR_0 + R_0} = m + \frac{1}{r + \frac{R_1}{R_0}}.$$

En substituant ici la valeur de R_0 (174.) on trouve

$$\frac{\gamma}{L_0} = m + \frac{1}{r + \frac{R_1}{r_1 R_1 + R_2}} = m + \frac{1}{r + \frac{1}{r_1 + \frac{R_2}{R_1}}}.$$

En continuant ces substitutions et égalant enfin l'expression trouvée à celle (180.) on aura l'équation

188. $$\frac{\gamma}{L_0} = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \cfrac{1}{r_n + \frac{R_{n+1}}{R_n}}}}} = \frac{p_n R_n + x_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{n+1}}.$$

X. Désignons par $\left(\frac{\gamma}{L_0}\right)$ la fraction qu'on obtient en négligeant celle $\frac{R_n}{R_{n+1}}$ dans (188.), c'est-à-dire supposons

189. $$\left(\frac{\gamma}{L_0}\right) = m + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r_1 + \cfrac{1}{r_2 + \cdots + \frac{1}{r_n}}}},$$

Digitized by Google

on voit qu'on tirera $\left(\frac{\gamma}{L_o}\right)$ de $\frac{\gamma'}{L_o}$ en fesant $R_{n+1} = 0$ dans l'expression de cette dernière fraction. Donc on a en vertu de l'équation (188.)

$$190. \quad \left(\frac{\gamma}{L_o}\right) = \frac{p_n R_n}{q_n R_n} = \frac{p_n}{q_n}.$$

XI. Retranchons (190.) de (188.) nous aurons:

$$\frac{\gamma}{L_o} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n R_n + \varkappa_n R_{n+1}}{q_n R_n + \lambda_n R_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n q_n R_n + \varkappa_n q_n R_{n+1} - p_n q_n R_n - p_n \lambda_n R_{n+1}}{q_n (q_n R_n + \lambda_n R_{n+1})},$$

ou bien

$$\frac{\gamma}{L_o} - \frac{p_n}{q_n} = -\frac{(p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n) R_{n+1}}{q_n (q_n R_n + \lambda_n R_{n+1})},$$

et $p_n \lambda_n - q_n \varkappa_n$ étant $= \pm 1$ (187.) et $q_n R_n + \lambda_n R_{n+1} = L_o$ (180.):

$$191. \quad \frac{\gamma}{L_o} - \frac{p_n}{q_n} = \mp \frac{R_{n+1}}{q_n L_o} \text{ (180.)}.$$

XII. Mais nous avons supposé (III.) que le reste R_{n+1} est indépendant de x. La quantité $\frac{\gamma}{L_o} - \frac{p_n}{q_n}$ sera donc une fraction dont le numérateur ne contient pas x.

XIII. Multipliant (191.) par $L_o q_n$, on a

$$\gamma q_n - L_o p_n = \mp R_{n+1},$$

ou bien

$$192. \quad L_o p_n = q_n \gamma \pm R_{n+1}.$$

XIV. Multiplions maintenant $\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mU}{Q_o \gamma + L_o}$ (170., 171.) en haut et en bas par p_n, nous aurons

$$193. \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{{}^mU p_n}{Q_o p_n \gamma + L_o p_n},$$

et en y substituant (192.) et supposant

$$194. \quad {}^mU p_n = P\gamma + K,$$

$$194.^* \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{P\gamma + K}{(Q_o p_n + q_n)\gamma \pm R_{n+1}} = \frac{{}^mU p_n}{{}^sN p_n}.$$

XV. Faisons enfin

$$195. \quad \begin{cases} p_n = M, \\ Q_o p_n + q_n = Q, \\ \pm R_{n+1} = {}^oC, \end{cases}$$

nous aurons

$$196. \quad \frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{M.{}^mU}{M.{}^sN} = \frac{P\gamma + K}{Q\gamma + {}^oC}.$$

XVI. Cela fait voir d'abord qu'il *existe* toujours un multiplicateur $M = p$ propre à réduire la fraction donnée $\frac{{}^mU}{{}^sN}$ à la forme $\frac{P\gamma + K}{Q\gamma + {}^oC}$. Donc

Digitized by Google

le calcul précédent de ce multiplicateur offre en même tems une démonstration de son *existence*, la *seconde*, annoncée (§. 17. XIV.).

XVII. Ensuite les résultats (195. et 196.) font voir qu'on trouve ce multiplicateur $M = p_n$ (196.) comme suit. Développez la fraction $\frac{\gamma}{L_0}$ en fraction continue (188.) en arrêtant le développement aussitôt que se présente un reste R_{n+1} indépendant de x. Calculez la valeur en x de cette fraction continue, après y avoir supprimé la dernière partie fractionnaire $\frac{R_{n+1}}{R_n}$ (188.), c'est-à-dire, calculez la valeur de la fraction $\left(\frac{\gamma}{L_0}\right)$ (189.): le numérateur p_n (190.) de cette fraction sera le multiplicateur M demandé (195.)

C'est précisement la règle d'Euler (§. 15. XIV.). Donc cette règle a été démontrée dans ce qui précède.

XVIII. Il y a encore à remarquer que les résultats du calcul précédent offrent en même tems les valeurs de Q et ${}^0C$ dans $M.{}^1N = Q\gamma + {}^0C$ (196.) comme le font voir les équations (195.). Donc on trouve sur le champ, et sans effectuer la multiplication de ${}^1N$ par le facteur calculé M, le *dénominateur* ${}^0C$ de la quantité ${}^{r-1}w$ (169.) cherchée dans la formule (162.). Il ne reste qu'à multiplier ${}^mU$ par $M = p_n$ et à diviser ${}^mU.M$ par ${}^r\gamma$. Le *reste* K de cette division donnera le *numérateur* de ${}^{r-1}w$ (169.) et par là la quantité ${}^{r-1}w$ sera calculée complètement.

XIX. Ayant effectué le développement de $\frac{\gamma}{L_0}$ en fraction continue et trouvé par là m, r, r_1, r_2, ... r_n (188.), les formules (181.) donnent le facteur $M = p_n$ comme suit. D'abord on tire de la première et de la troisième formule (181.)

$$197. \quad p_n = p_{n-1} r_n + p_{n-2}.$$

Ensuite (186.) donne

$$198. \quad p_0 = mr + 1 \quad \text{et} \quad \varkappa_0 = m,$$

et de là on tire par la première formule (181.), en y supposant $n = 1$,

$$199. \quad p_1 = (mr + 1) r_1 + m.$$

Puis la formule (197.), en y supposant $n = 2$, donne

$$200. \quad p_2 = p_1 r_2 + p_0,$$

et dès ici on peut continuer le calcul des p suivants jusqu'à p_n en mettant dans la formule générale (197.) successivement $n = 3, 4, \ldots$, jusqu'à n.

XX. D'ailleurs la méthode précédente d'Euler, de calculer le multiplicateur M, propre à réduire une fraction donnée

Digitized by Google

$$201. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0},$$

à la forme

$$202. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{M.{}^{m}U}{M.{}^{s}N} = \frac{M(P_0 y + K_0)}{M(Q_0 y + L_0)} = \frac{Py + K}{Qy + {}^{\circ}C},$$

où ${}^{\circ}C$ ne contient plus x, n'est pas la seule qui mène à ce but.

En voici encore deux autres.

21.

Seconde méthode de calculer M. (202.)

I. Il est clair qu'il ne s'agit que de trouver un polynome M propre à donner

$$203. \quad M.{}^{s}N = Qy + {}^{\circ}C,$$

où ${}^{\circ}C$ ne contient points des x. Ce polynome sera la multiplicateur cherché.

II. Nous avons démontré (§. 17.) *l'existance* de ce polynome. Mais cette démonstration renferme en même tems le mode même de calcul du polynome M. En effet il n'y a qu'à faire les calculs indiqués (§. 17. III. — XI.) pour arriver à l'équation (158.) qui coïncide avec (203.) et offre non seulement M, mais les trois quantités cherchées M, Q et ${}^{\circ}C$.

III. Il y a encore à remarquer, que le *même* multiplicateur M qui donne

$$204. \quad M.L_0 = Q_1 y + {}^{\circ}C,$$

donnera aussi à $M.{}^{s}N$ la forme $Qy + {}^{\circ}C$; car ${}^{s}N$ étant $Q_0 y + L_0$, la différence de $M.{}^{s}N$ et $M.L_0$ ne sera qu'un multiple de y que ne change pas la forme demandée. Donc on pourra encore abréger le calcul, en mettant L_0 à la place de ${}^{s}N$.

22.

Troisième méthode de calculer M. (204.)

I. Il est d'abord clair que si le coefficient de la plus haute puissance de x dans y est $=1$, comme il le sera ordinairement, celui de la plus haute puissance de x dans M peut être supposé également $=1$; car il n'y a alors qu'à égaler le coefficient de la plus haute puissance de x dans Q_1 (204.) à celui de la plus haute puissance de x dans L_0.

II. Cela posé, en transformant l'équation (204.) en

$$205. \quad \frac{M.L_0 - {}^{\circ}C}{{}^{r}y} = Q_1,$$

on voit de cette expression que $M.L_0 - {}^{\circ}C$ doit être *divisible* par ${}^{r}y$, c'est-à-dire, que si l'on *divise* $M.L_0 - {}^{\circ}C$ par ${}^{r}y$, le *reste* de la division doit être zéro.

Digitized by Google

III. Ce *reste* sera du degré $r-1$, le diviseur ^{r}y étant du degré r; donc ses r termes seront propres à déterminer r coefficiens inconnus. La quantité $^{\circ}C$, indépendante de x, étant regardée comme une de ces inconnues, le multiplicateur M peut en contenir les $r-1$ autres. Donc, le coefficient de son premier terme étant $=1$, il sera généralement du degré $r-1$ et on peut supposer

$$206. \quad {}^{r-1}M = x^{r-1} + \lambda_1 x^{r-2} + \lambda_2 x^{r-3} - \ldots + \lambda_{r-1}.$$

VI. Cela posé, il n'y a qu'à multiplier L_o par ^{r-1}M (206.), ajouter $-{}_{o}C$ au produit, diviser la somme par ^{r}y et égaler à zéro les coefficiens de r différens termes du *reste* de la division, qui renfermeront les r quantités inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{r-1}$ et $^{\circ}C$. Cela fournira r équations *du premier degré*, desquelles on pourra tirer les r inconnues.

V. Mais puisque l'inconnue $^{\circ}C$ ne se présente que dans le dernier terme sans x du dividende $ML_o - {}^{\circ}C$, elle ne se présentera aussi que dans le dernier terme sans x du *reste*. Donc les $r-1$ premières équations, qu'on tire du *reste*, doivent déjà donner les r inconnues λ.

VI. Le degré du multiplicateur M ne peut être supérieur à $r-1$; car, s'il l'étoit, il se présenteroit un plus grand nombre d'inconnues qui ne peuvent être trouvées par l'évaluation des différents termes du reste.

VII. Mais il peut être *moindre* que $r-1$, car il se peut que quelques unes des $r-1$ équations, contenant les inconnues λ, soient *identiques*. Dans ce cas le premier terme x^{r-1} de M (206.), suivi peut être de quelques autres, ne pourroit pas subsister. Et puisqu'on a fixé davance la valeur du coefficient de x^{r-1}, les équations qu'on trouve ne peuvent pas indiquer cette circonstance autrement qu'en tombant *en contradiction*.

VIII. Donc si les $r-1$ équations, qui renferment les $r-1$ inconnus $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{r-1}$ (206.), se trouvent être *en contradiction*, ce sera un signe que le degré de M doit être *moindre* que $r-1$ et il faut essayer un autre multiplicateur d'un degré plus foible. Lorsqu'on aura introduit un tel multiplicateur, toutes les équations déterminantes qu'il y aura alors de *trop* devront être *identiques*.

23.

Appliquons à un exemple nos trois méthodes de calcul du multiplicateur M propre à transformer la fraction $\frac{^{m}U}{^{s}N}$ en $\frac{M}{M}\frac{^{m}U}{^{s}N} = \frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$, où C ne contient plus x, et choisissons cet exemple parmi ceux d'Euler.

Digitized by Google

Exemple (Mémoire d'Euler §. 18.)

207. $$\begin{cases} {}^{m}U = x^3 + 1; \\ {}^{n}N = x^5 + x^3 + 1 = L_0; \quad Q_0 = 0; \ (171.) \\ {}^{r}y = x^4 + 1; \end{cases}$$

I. *Première méthode* (§. 20.). Suivant cette méthode il faut développer $\frac{\gamma}{L_0}$ en fraction continue, en s'arrêtant au premier reste indépendant de x. Cela donne

208.
$$\begin{array}{l|l|l} x^5+x^3+1 & x^4+1 & x \\ -x^5-x^3-x & & \\ \hline -x^3-x+1 & x^3+x^2+1 & -1 \\ & -x^3-x+1 & \\ \hline & x^2-x+2 & -x^3-x+1 \ | -x \\ & & +x^3-x^2+2x \\ \hline & & -x^2+x+1 \ | \ x^2-x+2 \ | -1 \\ & & -x^2+x+1 \\ \hline & & +3 \end{array}$$

donc on a

209. $$\frac{\gamma}{L_0} = \frac{x^4+1}{x^5+x^3+1} = x + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-x + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{3}{-x^2+x+1}}}}$$

et en (188.)

210. $$\begin{cases} m = x, \\ r = -1, \\ r_1 = -x, \\ r_2 = -1 = r_n, \\ R_n = -x^2 + x + 1, \\ R_{n+1} = 3, \end{cases}$$

De là on tire par les formules (197 — 200.)

211. $$\begin{cases} p_0 = mr + 1 = -x + 1, \\ p_1 = (mr+1)r_1 + m = -x(-x+1) + x = x^2, \\ p_2 = p_1 r_2 + p_0 = -x^2 + (-x+1) = -x^2 - x + 1, \end{cases}$$

donc suivant (195.)

212. $$\begin{cases} M = p_2 = -x^2 - x + 1, \\ {}^{n}C = \pm R_{n+1} = +3, \ n \text{ étant pair.} \end{cases}$$

En effet le multiplicateur $M = -x^2 - x + 1$ donne

213. $$\begin{cases} M.{}^{n}N = (-x^2-x+1)(x^5+x^3+1) = -x^7 - 2x^4 - x + 1 \\ \qquad = -(x+2)(x^4+1) + 3 = -(x+2)\,{}^{r}y + 3, \\ M.{}^{m}U = (-x^2-x+1)(x^3+1) = -x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - x + 1, \end{cases}$$

donc

Digitized by Google

214. $$\frac{^mU}{^sN} = \frac{M.^mU}{M.^sN} = \frac{-x^5-x^4+x^3-x^2-x+1}{-(x+2).^ry+3} = \frac{x^5+x^4-x^3+x^2+x-1}{(x+2).^ry-3},$$

résultat conforme à celui d'Euler.

II. *Seconde méthode* (§. 21.). En multipliant L_0 (207.) par x, on a

215. $$xL_0 = x^4+x^3+x$$

et en divisant par $^ry = x^4+1$,

216. $$xL_0 = {}^ry + x^3 + x - 1.$$

En multipliant de nouveau par x et divisant par y on trouve

217. $$x^2L_0 = (x+1)\,{}^ry + x^2 - x - 1.$$

Combinons les trois équations

218. $$\begin{cases} L_0 = x^3+x^2+1 \text{ (207.)}, \\ xL_0 = {}^ry + x^3 + x - 1 \text{ (216.) et} \\ x^2L_0 = (x+1)\,{}^ry + x^2 - x - 1, \end{cases}$$

nous aurons

219. $$(x-1)L_0 = {}^ry - x^2 + x - 2,$$

220. $$(x^2+x-1)L_0 = (x+2)\,{}^ry - 3,$$

ou bien

$$(-x^2-x+1)L_0 = -(x+2).{}^ry + 3.$$

Cela donne

221. $$M = -x^2-x+1,$$

et s'accorde avec (213.). Le reste du calcul coïncide avec celui (I.).

III. *Troisième méthode* (§. 22.). Supposons

222. $$M = x^3 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3,$$

on a

$$ML_0 - {}^oC = (x^3+\lambda_1x^2+\lambda_2x+\lambda_3)(x^3+x^2+1) - {}^oC,$$

ou bien

223. $$ML_0 - {}^oC = x^6 + (\lambda_1+1)x^5 + (\lambda_2+\lambda_1)x^4 + (\lambda_3+\lambda_2+1)x^3 + (\lambda_3+\lambda_1)x^2 + \lambda_2x + \lambda_3 - {}^oC.$$

Divisons par $^ry = x^6+1$, on aura

224. $$ML_0 - {}^oC = {}^ry(x^2+(\lambda_1+1)x+\lambda_2+\lambda_1) + (\lambda_3+\lambda_2+1)x^3 + (\lambda_3+\lambda_2-1)x^2 + (\lambda_2-\lambda_1-1)x + \lambda_3-\lambda_2-\lambda_1-{}^oC,$$

donc les équations qui détermineront λ_1, λ_2, λ_3 et ^oC seront

225. $$\begin{cases} \lambda_3+\lambda_2+1 = 0, \\ \lambda_3+\lambda_1+1 = 0, \\ \lambda_2-\lambda_1-1 = 0, \\ \lambda_3-\lambda_2-\lambda_1-{}^oC = 0. \end{cases}$$

Des deux premières équations on tire en les soustrayant l'une de l'autre

226. $\lambda_2-\lambda_1+2 = 0$, ou bien $\lambda_2-\lambda_1 = -2$.

Digitized by Google

Mais cela est *en contradiction* avec la troisième équation qui donne $\lambda_2 - \lambda = +1$. Donc le degré du multiplicateur M a été supposé trop fort (§. 22. VIII.) et il faut supposer

227. $$M = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2.$$

Cela donne

$$ML_0 - {}^0C = (x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)(x_3 + x_2 + 1) - {}^0C,$$

ou bien

228. $$ML_0 - {}^0C = x^5 + (\lambda_1 + 1)x^4 + (\lambda_2 + \lambda_1)x^3 + (\lambda_2 + \lambda_1)x^2 + \lambda_2 x + \lambda_2 - {}^0C.$$

Divisant par $y = x^2 + 1$, on aura

229. $$ML_0 - {}^0C =$$
$$Qy(x + \lambda_1 + 1) + (\lambda_2 + \lambda_1)x^3 + (\lambda_2 + 1)x^2 + (\lambda_1 - 1)x + \lambda_2 - \lambda_1 - 1 - {}^0C.$$

Donc les équations déterminantes seront

230. $$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 + 1 = 0, \\ \lambda_1 - 1 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_1 - 1 - {}^0C = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la second de la première on tombe dans la troisième d'où l'on voit que celle-ci est *identique* avec les deux premières (§. 22. VIII.). La troisième et la seconde équation donnent

131. $$\begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -1, \end{cases}$$

et puis la quatrième $-1 - 1 - 1 - {}^0C = 0$, donc

232. $${}^0C = -3;$$

donc on a suivant (227.)

233. $$M = x^2 + x - 1,$$

et, en vertu de $ML_0 = Qy - {}^0C$,

$$(x^2 + x - 1)L_0 = Q_1 y + 3,$$

ou bien

234. $$(-x^2 - x + 1)L_0 = Q_1 y - 3,$$

et cela s'accorde encore avec (214.), le reste du calcul étant le même que celui là.

24.

I. Les méthodes précédentes servent à trouver ${}^{n-1}\omega$ ou ${}^{n-1}W$ dans (122. et 123.). D'abord ayant fait dans l'expression de la fraction à décomposer $\frac{{}^nU}{{}^{n-1}N'}$

Digitized by Google

$$235. \quad \begin{cases} {}^{m}U = P_0 y + K_0 \text{ et} \\ {}^{s}N = Q_0 y + L_0 \end{cases}$$

dans le première cas et

$$236. \quad \begin{cases} {}^{m}U = {}^{1}P_0 y^{\varrho} + {}^{1}K_0 \text{ et} \\ {}^{s}N = {}^{1}Q_0 y^{\varrho} + {}^{1}L_0 \end{cases}$$

dans le second, on transformera la fraction $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{P^{\circ} y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ ou $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{{}^{1}P_0 y + {}^{1}K_0}{{}^{1}Q_0 y + {}^{1}L_0}$ en une autre de la forme

$$237. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{Py + K}{Qy + {}^{\circ}C} \text{ ou } \frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{{}^{1}P y + {}^{1}K}{{}^{1}Q y + {}^{\circ}C},$$

soit par la méthode (No. 15. III. — XII.), soit à l'aide d'un multiplicateur M. Cela étant fait on a (169.)

$$238. \quad {}^{s-1}w = \frac{K}{{}^{\circ}C} \text{ ou}$$

$$239. \quad {}^{r\varrho-1}W = \frac{{}^{1}K}{{}^{\circ}C}.$$

Ayant trouvé w ou W, on calculera Z (122. et 123.) suivant (No. 15. XV.).

II. Si l'exposant ϱ de ${}^{r}y$ n'est pas assez faible, il sera ordinairement préférable de calculer ${}^{r-1}w$ au lieu de ${}^{r\varrho-1}W$ et puis ${}^{n-r-1}Z$, en opérant ensuite sur Z.

Mais si l'on a calculée ${}^{r\varrho-1}W$ (123.) il y a encore à décomposer la première fraction partielle $\frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}}$ en

$$240. \quad \frac{{}^{r\varrho-1}W}{{}^{r}y^{\varrho}} = \frac{{}^{r-1}w_1}{{}^{r}y^{\varrho}} + \frac{{}^{r-1}w_2}{{}^{r}y^{\varrho-1}} + \frac{{}^{r-1}w_3}{{}^{r}y^{\varrho-2}} \ldots\ldots \frac{{}^{r-1}w_{\varrho}}{{}^{r}y} \text{ (8.).}$$

Cela se fait en *divisant* ${}^{r\varrho-1}W$ par ${}^{r}y$, le *quotient* de nouveau par ${}^{r}y$, le second quotient encore par ${}^{r}y$ et ainsi de suite, jusqu'à ce que le *degré* du dernier quotient soit *inférieur* à celui r de y. Les *restes* des différentes divisions donneront sur le champ les numérateurs w_1, w_2, w_3, ... w_{ϱ} des fractions partielles (240.). En effet, supposons

$$241. \quad \begin{cases} {}^{r\varrho-1}W = {}^{(\varrho-1)r-1}T_1 \, {}^{r}y + {}^{r-1}w_1, \\ {}^{(\varrho-1)r-1}T_1 = {}^{(\varrho-2)r-1}T_2 \, {}^{r}y + {}^{r-1}w_2, \\ {}^{(\varrho-2)r-1}T_2 = {}^{(\varrho-3)r-1}T_3 \, {}^{r}y + {}^{r-1}w_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{2r-1}T_{\varrho-2} = {}^{r-1}T_{\varrho-1} \, {}^{r}y + {}^{r-1}w_{\varrho-1}, \\ {}^{r-1}T_{\varrho-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots {}^{r-1}w_{\varrho}, \end{cases}$$

Digitized by Google

de sorte qu'en substituant ces expressions l'une dans l'autre on a

$$242. \quad \begin{cases} {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^{r}y\,({}^{r-1}w_2 + {}^{(\varrho-2)r-1}T_2\,{}^{r}y), \\ {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^{r}y\,({}^{r-1}w_2 + {}^{r}y)\,({}^{r-1}w_3 + {}^{(\varrho-3)r+2}T_3\,{}^{r}y); \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}^{r\varrho-1}W = {}^{r-1}w_1 + {}^{r}y\,.\,{}^{r-1}w_2 + {}^{r}y^2\,.\,{}^{r-1}w_3 + {}^{r}y^3\,.\,{}^{r-1}w_4 \ldots + {}^{r}y^{\varrho-1}\,.\,{}^{r-1}w_\varrho, \end{cases}$$

la dernière expression (242.), divisée par ${}^{r}y^{\varrho}$, donnera sur le champ celle (240.) qu'on a demandée.

25.

Dans le cas où ${}^{r}y$ est du *premier* degré, c'est-à-dire $r=1$, les *restes* K_0 et L_0 de la division de ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ par ${}^{r}y$ (235.) seront du degré zéro, ou *indépendants* de x; donc L_0 a déjà dans ce cas la forme requise et la transformation de $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ en $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N} = \frac{Py+K}{Qy+{}^{s}C}$ (No. 24. I.) n'est pas nécessaire ici. Il n'y a qu'à diviser ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ par y; les *restes* K_0 et L_0 de ces divisions donneront sur le champ

$$243. \quad w = \frac{K_0}{L_0} = \frac{K}{{}^{s}C} \quad (169.).$$

Mais on trouve également les restes K_0 et L_0 des divisions de ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ par ${}^{r}y$, si dans ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ on donne à x la valeur déterminée par l'équation

$$244. \quad {}^{r}y = 0,$$

puisque $y=0$ donne en vertu de (235.) ${}^{m}U = K_0$ et ${}^{s}N = L_0$. Par là on voit que dans le cas $r=1$ la présente cinquième méthode de décomposition des fractions algébriques, si l'on calcule par cette méthode, comme il est préférable, ${}^{r-1}w$ et non pas ${}^{r\varrho-1}W$, coïncide absolument avec la *seconde* méthode de décomposition.

Elle ne diffère donc de celle-ci que dans le cas où $y>1$. Dans ces cas les méthode antérieures sont obligées de donner à x les différentes valeurs déterminées qui satisfont à l'équation ${}^{r}y = 0$; la présente méthode elude cette incommodité.

26.

Il y a donc seulement lieu aussi d'appliquer la présente méthode à notre *second* exemple (No. 7.). Son application au premier exemple ne donneroit que les calculs (No. 10.).

I. Dans ce second exemple nous avons

$$245. \quad {}^{r}y = x^2 - 2x + 3 \quad (61.)$$

et, en divisant ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ (60. et 62.) par ${}^{r}y$ pour trouver ${}^{r-1}w$, on a

Digitized by Google

246. $\begin{cases} {}^{m}U = P_0 y + K_0 (235.) \\ \quad = (17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 161x^3 - 408x^2 - 45x + 7)(x^3 - 2x + 5) - 183x + 96, \\ {}^{s}N = Q_0 y + L_0 (235) = (x^3 + 5x^2 + 9x - 7)(x^3 - 2x + 5) - 61x + 32, \end{cases}$

donc

247. $\begin{cases} K_0 = -183x + 96, \\ L_0 = -61x + 32. \end{cases}$

II. Maintenant il y aurait à calculer le multiplicateur M propre à réduire $\frac{{}^{m}U}{{}^{s}N}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$, où C ne contient plus x. Mais ici K_0 est *divisible* par L_0 et on a $\frac{K_0}{L_0} = 3$. Donc quel que soit le multiplicateur M, on aurait encore $\frac{MK_0}{ML_0} = 3$. Donc on est dispensé du calcul du multiplicateur et on a $\frac{K}{{}^{\circ}C} = \frac{K^0}{L_0}$ et sur le champ, suivant (169.)

248. $^{r-1}w = 3.$

III. Le numérateur ^{r-1}w de la première fraction partielle étant trouvé, on a suivant (142.)

249. $$^{n-r-1}Z = \frac{{}^{m}U - {}^{r-1}w\,{}^{s}N}{{}^{r}\gamma}$$

$$= \frac{(17x^8 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131) - 3(x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3)}{x^3 - 2x + 5},$$

et cela donne

250. $^{n-r-1}Z = 17x^6 - 111x^5 + 124x^4 - 164x^3 - 423x^2 - 72x + 28.$

Cette quantité prendra la place de ^{m}U (246.), en calculant le numérateur de la *seconde* fraction partielle.

IV. Elle donne pour ce numérateur

251. $P_0 y + K_0 = (17x^6 + 77x^5 - 115x^2 - 9x + 134)(x^3 - 2x + 5) + 241x - 642,$

donc suivant (251. et 247.)

252. $\begin{cases} K_0 = +241x - 642, \\ L_0 = -61x + 32. \end{cases}$

V. Ici K_0 n'est pas divisible par L_0 comme il l'étoit (II.). Donc il faut chercher le multiplicateur M propre à réduire $\frac{U}{N}$, ou bien $\frac{K_0}{L_0}$, à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^{\circ}C}$, où C ne contient pas x.

VI. Nous ferons cela suivant la *troisième* méthode (No. 22.). Supposons

253. $M = x + \lambda,$

nous avons

254. $L_0 M - {}^{\circ}C = -61x^2 + (32 - 61\lambda)x + 32\lambda - C_0.$

Digitized by Google

Cela, étant divisé par $y = x^2 - 2x + 5$, donne

255. $L_0 M - {}^{\circ}C = -61y - (90 + 61\lambda)x + 32\lambda - {}^{\circ}C + 305,$

donc

256. $\begin{cases} 90 + 61\lambda = 0 \text{ et} \\ 305 + 32\lambda - {}^{\circ}C = 0, \end{cases}$

et de là on tire

257. $\begin{cases} \lambda = -\frac{90}{61}, \\ {}^{\circ}C = 305 - 32.\frac{90}{91} = \frac{15725}{61}. \end{cases}$

171. Multipliant maintenant $K_0 = 241x - 642$ (252.) par $M = x - \frac{90}{61}$ (253. et 257.), on a

256. $K_0 M = 241x^2 - \left(642 + \frac{90.241}{61}\right)x + \frac{642.90}{61},$

et en divisant par $y = x^2 - 2x + 5$,

257. $K_0 M = 241y - \left(160 + \frac{90.241}{61}\right)x - 1205 + \frac{642.90}{61}$

$= 241y - \frac{31450}{61}x - \frac{15725}{61},$

donc

258. $K = -\frac{31450x + 15725}{61},$

donc enfin suivant (166.)

259. ${}^{r-1}w_s = \frac{K}{{}^{\circ}C} = \frac{-\frac{31450x + 15725}{61}}{\frac{15725}{61}}$ (258., 257.) $= -(2x + 1).$

VIII. Voici le numérateur de la seconde fraction partielle. On a donc jusqu'ici

260. $\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho} - {}^{s}N}$ (63.) $= \frac{3}{(x^2 - 2x + 5)^2}$ (248.) $- \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$ (259.) etc.

IX. Nous ne continuerons pas plus loin ce calcul qui, comme on voit, est encore assez fatigant. Nous passerons plutôt d'abord à une autre méthode un peu plus prompte, au moins plus régulière, tirée de la présente.

§. VI. Sixième méthode.

27.

I. Soit comme ci-dessus

261. $\frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{\varrho} \cdot {}^{s}N}$

la fraction proposée à être décomposée en fractions partielles de la forme (8.).

Digitized by Google

Divisons d'abord ${}^{m}U$ et ${}^{s}N$ par ${}^{r}y$, et soient P_0 et Q_0 les quotients et K_0, L_0 les restes de ces divisions, la fraction proposée prendra la forme

$$262. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{q}.{}^{s}N} = \frac{P_0 y + K_0}{(Q_0 y + L_0)\,{}^{r}y^{q}}.$$

II. Réduisons $\frac{P_0 y + K_0}{Q_0 y + L_0}$ à la forme $\frac{Py + K}{Qy + {}^{\circ}C}$, où ${}^{\circ}C$ ne contient plus x, soit par la méthode (No. 15. VII. — XII.) ou en calculant d'après (No. 20., 21. ou 22.) le multiplicateur M propre à donner à $M(Q_0 y + L_0)$ la forme $Qy + {}^{\circ}C$, et en multipliant après en haut et en bas par M.

Cela fait, la fraction proposée prendra la forme

$$263. \quad \frac{{}^{m}U}{{}^{r}y^{q}.{}^{s}N} = \frac{K + Py}{(C + Qy)\,{}^{r}y^{q}}.$$

III. Divisons maintenant $K + Py$ par $C + Qy$, non suivant les puissances *descendantes*, mais suivant les puissances *ascendantes* de y.

Le premier terme du quotient sera $\frac{K}{C}$ et le reste $\frac{PC - KQ}{C}y$, car on a

$$263. \quad \frac{K + Py}{C + Qy} = \frac{K}{C} + \frac{(CP - KQ)y}{C(C + Qy)}.$$

IV. Supposons

$$265. \quad \frac{CP - KQ}{C}, \text{ ou bien } P - \frac{K}{C}Q = K_1 + P_1 y,$$

où l'on trouvera K_1 et P_1 en divisant $\frac{CP - KQ}{C}$ par y; le quotient de cette division sera P_1 et le reste K_1.

Cela fait, l'équation (264.) se reduira à

$$266. \quad \frac{K + Py}{C + Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1 + P_1 y}{C + Qy}.y.$$

V. Ici la fraction $\frac{K_1 + P_1 y}{C + Qy}$ est tout-à-fait semblable à celle $\frac{K + Py}{C + Qy}$ (263.); il n'y a qu'à mettre K_1 et P_1 à la place de K et P, pour réduire la seconde à la première.

On peut donc continuer la division (III.) et on aura

$$267. \quad \frac{K + Py}{C + Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}.y + \frac{CP_1 - K_1 Q}{C(C + Qy)}y^2.$$

VI. En supposant de nouveau

$$268. \quad \frac{CP_1 - K_1 Q}{C}, \text{ ou bien } P_1 - \frac{K_1}{C}Q = K_2 + P_2 y,$$

et divisant, on aura

$$269. \quad \frac{K + Py}{C + Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}y + \frac{K_2}{C}y^2 + \frac{CP_2 - K_2 Q}{C(C + Qy)}y^3,$$

et ainsi de suite.

Digitized by Google

VII. Ayant continué cette opération, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la puissance y^ϱ de y, on aura

$$270.\quad \frac{K+Py}{C+Qy} = \frac{K}{C} + \frac{K_1}{C}y + \frac{K_2}{C}y^2 + \frac{K_3}{C}y^3 \ldots + \frac{K_{\varrho-1}}{C}y^{\varrho-1} + \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{C+Qy}.y^\varrho,$$

donc en substituant dans (263.),

$$271.\quad \frac{{}^mU}{r_{y^\varrho}.{}^sN} = \frac{K}{C.r_{y^\varrho}} + \frac{K_1}{C.r_{y^{\varrho-1}}} + \frac{K_2}{C.r_{y^{\varrho-2}}} \ldots + \frac{K_{\varrho-2}}{C.r_y} + \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{C+Qy}.$$

VIII. Voilà le développement complet de la fraction proposée. En le comparant avec la forme générale (8.), savoir avec

$$272.\quad \frac{{}^mU}{r_{y^\varrho}.{}^sN} = \frac{{}^{r-s}w_1}{r_{y^\varrho}} + \frac{{}^{r-s}w_2}{r_{y^{\varrho-1}}} + \frac{{}^{r-s}w_3}{r_{y^{\varrho-2}}} \ldots + \frac{{}^{r-s}w_\varrho}{r_y} + \frac{{}^{s-1}Z_\varrho}{{}^sN},$$

on voit que

$$273.\quad \begin{cases} w_1 = \frac{K}{C},\ w_2 = \frac{K_1}{C},\ w_3 = \frac{K_2}{C},\ \ldots,\ w_\varrho = \frac{K_{\varrho-1}}{C}, \\ M.{}^sN = C + Qy, \\ M.{}^{s-1}Z_\varrho = P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}Q, \text{ donc } {}^{s-1}Z_\varrho = \frac{P_{\varrho-1} - \frac{K_{\varrho-1}}{C}.Q}{M}, \end{cases}$$

où l'on trouvera les différentes quantités $K, K_1, \ldots K_{\varrho-1}, C, P_{\varrho-1}, Q$ par les équations suivantes:

$$274.\quad \begin{cases} M.{}^mU = K + Py, \\ M.{}^sN = C + Qy, \\ P - \frac{K}{C}.Q = K_1 + P_1 y, \\ P_1 - \frac{K_1}{C}.Q = K_2 + P_2 y, \\ P_2 - \frac{K_2}{C}.Q = K_3 + P_3 y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

IX. Cette méthode de développement exige donc les opérations suivantes.

1. Chercher un multiplicateur M, tel, que $M.{}^sN = C + Qy$, ou bien si

$$275.\quad {}^sN = L_0 + Q_0 y,$$

tel, que ML_0 ait la forme $C + Qy$, où C ne contient pas x.

2. Diviser $M.{}^mU$ par y; le reste étant supposé K et le quotient P, on aura $w_1 = \frac{K}{C}$. Diviser ensuite $P - \frac{K}{C}.Q$ par y; si le reste est K_1,

Digitized by Google

et le quotient P_1, on aura $\omega_2 = \frac{K_2}{C}$. Diviser $P_1 - \frac{K_1}{C}.Q$ par y; si le reste est K_2 et le quotient P_2 on aura $\psi_3 = \frac{K_3}{C}$, et ainsi de suite.

3. Diviser enfin $P_{\epsilon-1} - \frac{K_{\epsilon-1}}{C}$ par M; le quotient sera Z.

28.

Dans le cas $r = 1$, c'est-à-dire où le facteur ^ry du dénominateur de la fraction proposée $\frac{^mU}{^ry^e.{}^sN}$ est du *premier* degré, les calculs de la méthode présente se simplifient beaucoup.

I. D'abord dans

$$276. \quad \begin{cases} {}^mU = P_0 y + K_0 \text{ et} \\ {}^sN = Q_0 y + L_0, \end{cases}$$

les restes K_0 et L_0 de la division de U et N par y sont déjà deux mêmes indépendants de x. Donc le calcul du multiplicateur M, propre à donner à $M.{}^sN$ la forme $Qy + C$, *n'est pas nécessaire ici*, et L_0 prend la place de ^sC.

II. Divisons de nouveau P_0 et Q_0 par y et supposons

$$277. \quad P_0 = P_1 y + K_1 \text{ et } Q_0 = Q_1 y + L_1,$$

où K_1 et L_1 seront indépendants de x, nous aurons

$$278. \quad \begin{cases} {}^mU = P_1 y^2 + K_1 y + K_0, \\ {}^sN = Q_1 y^2 + L_1 y + L_0. \end{cases}$$

Divisons encore P_1 et Q_1 par y, et soit

$$279. \quad P_1 = P_2 y + K_2 \text{ et } Q_1 = Q_2 y + L_2,$$

où K_2 et L_2 seront encore indépendants de x, nous aurons

$$280. \quad \begin{cases} {}^mU = P_2 y^3 + K_2 y^2 + K_1 y + K_0, \\ {}^sN = Q_2 y^3 + L_2 y^2 + L_1 y + L_0. \end{cases}$$

Continuons cette opération jusqu'à-ce qu'on soit arrivé à des quotients qui ne sont plus divisibles par y. Ces quotients seront P_{m-1} et Q_{s-1}; ils seront indépendants de x, ainsi que toutes les autres quantités K et L et on aura

$$281. \quad \begin{cases} {}^mU = P_{m-1}.y^m + K_{m-1}.y^{m-1} + K_{m-2}.y^{m-2} \ldots + K_0, \\ {}^sN = Q_{s-1}.y^s + L_{s-1}.y^{s-1} + L_{s-2}.y^{s-2} \ldots + L_0. \end{cases}$$

III. On voit que les calculs (II.) n'ont d'autre but que de transformer les deux polynomes en x, ^mU et ^sN, en deux autres en y des mêmes degrés. Cela se fait effectivement par des divisions réitérées, comme il a été décrit dans (II.). Mais la transformation peut encore être effectuée par deux autres méthodes.

Digitized by Google

IV. Soit

282. $$y = x + \alpha,$$

il n'y a qu'à *substituer* $y - \alpha$ au lieu de x dans ${}^mU$ et ${}^sN$. Cela donnera également les deux expressions (281.). Les calculs nécessaires seront à peu près de la même étendue que ceux dans (II.). C'est le *second* moyen de transformation. Voici le troisième.

V. Ecrivez y à la place de x dans U et N, et tirez des expressions que vous aurez, et que nous désignerons pas u et n, les *coefficiens différentiels* ∂u, $\partial^2 u, \ldots \partial^m n$ et ∂n, $\partial^2 n, \ldots \partial^s n$ respectivement jusqu'à le m^{me} et s^{me} ordre. Ces coefficiens différentiels, en mettant, comme cela doit être, $y - \alpha$ à la place de y, vous donneront, en vertu du théorème de Taylor:

283. $${}^mU = u - \alpha\partial u + \frac{\alpha^2}{2}\partial^2 u - \frac{\alpha^3}{2.3}\partial^3 u, \ldots \pm \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m}\partial^m u;$$

284. $${}^sN = n - \alpha\partial n + \frac{\alpha^2}{2}\partial^2 n - \frac{\alpha^3}{2.3}\partial^3 n \ldots \pm \frac{\alpha^m}{2.3\ldots m}\partial^s n.$$

C'est le *troisième* mode de transformation.

VI. Ayant transformé par une des trois méthodes (II. IV. V.) ${}^mU$ et ${}^sN$ en deux polynomes en y de la forme (281.), il n'y a qu'à *diviser* ${}^mU$ par ${}^sN$ suivant les puissances *ascendantes* de x, en s'arrêtant aussitôt que le quotient présente la puissance y^ϱ de y. Cela donnera une expression de la forme

285. $$\frac{{}^mU}{{}^sN} = w_1 + w_2 y + w_3 y^2 \ldots, + w_\varrho y^{\varrho-1} + \frac{Z.y^\varrho}{{}^sN},$$

Pour éviter les fractions, on peut supposer

287. $$y = Cz,$$

si C est le terme sans y dans ${}^sN$.

VII. En substituant enfin cette expression dans celle de la fraction proposée (261.), on aura

286. $$\frac{{}^mU}{{}^sN} = \frac{w_1}{y^\varrho} + \frac{w_2}{y^{\varrho-1}} + \frac{w_3}{y^{\varrho-2}} \ldots + \frac{w_\varrho}{y} + \frac{Z}{{}^sN},$$

et c'est le développement complet de la fraction proposée en fractions partielles. Toutes les quantités w seront indépendantes de x, mais Z sera exprimé en y, donc il faut transformer encore Z en un polynome en x.

VIII. La sixième méthode de décomposition des fractions algébriques exige donc, dans le cas particulier $y = 1$, les calculs suivants.

1. Transformer ${}^mU$ et ${}^sN$ par l'une ou l'autre des trois méthodes (II. IV. V.) en deux polynomes en y.

Digitized by Google

2. Diviser le polynome transformé ${}^mU$ par celui ${}^nN$ suivant les puissances *ascendantes* de x, en s'arrêtant aussitôt que le nouveau quotient présente y^ϱ comme facteur. Les facteurs de y^0, y^1, y^2, ... y^ϱ et $y^{\varrho-1}$ des différents quotiens seront les numérateurs w_1, w_2, w_3, ... w_ϱ et Z des fractions partielles cherchées.

3. Transformer le dernier quotient Z, qui sera exprimée en y, en un autre polynome de même degré en x.

IX. On voit que dans le cas particulier $y = 0$ la sixième méthode de décomposition des fractions coïncide avec celle que Mr. Dirksen a donné dans son mémoire No. 6. tome I. cah. 1. de ce journal. Donc elle peut être regardée comme la généralisation de cette dernière méthode effectuée par les procedés qu'Euler a donnés dans les Mémoires de St. Petersbourg, tome I. 1809. page 1 — 25.

20.

Appliquons la sixième méthode à notre premier exemple (59.).

I. Dans cet exemple on a

$$288.\quad \begin{cases} {}^mU = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35, \\ {}^nN = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81, \\ y = x - 2, \quad \alpha = -2 \text{ (282.)}, \\ \varrho = 5. \end{cases}$$

II. Transformons suivant la troisième méthode (§. 28. V.) U et N en polynomes en y. Nous aurons

$$289.\quad \begin{cases} u = y^6 - 9y^5 + 30y^4 - 42y^3 + 23y^2 - 21y + 35, \\ \partial u = +6y^5 - 45y^4 + 120y^3 - 126y^2 + 46y - 21, \\ \partial^2 u = +30y^4 - 180y^3 + 360y^2 - 252y + 46, \\ \partial^3 u = +120y^3 - 540y^2 + 720y - 252, \\ \partial^4 u = +360y^2 - 1080y + 720, \\ \partial^5 u = +720y - 1080, \\ \partial^6 u = +720; \end{cases}$$

$$290.\quad \begin{cases} n = y^5 - 6y^4 + 2y^3 + 51y^2 - 117y + 81, \\ \partial n = +5y^4 - 24y^3 + 6y^2 + 102y - 117, \\ \partial^2 n = +20y^3 - 72y^2 + 12y + 102, \\ \partial^3 n = +60y^2 - 144y + 12, \\ \partial^4 n = +120y - 144, \\ \partial^5 n = +120; \end{cases}$$

Digitized by Google

donc suivant (283 — 4.)

291. $$^mU = y^6 - 9y^5 + 30y^4 - 42y^3 + 23y^2 - 21y + 35 = y^6 + 3y^5 - 2y^3 + 11y^2 - y + 5;$$
$$+12y^5 - 90y^4 + 240y^3 - 252y^2 + 92y - 42$$
$$+60y^4 - 360y^3 + 720y^2 - 504y + 92$$
$$+160y^3 - 720y^2 + 960y - 336$$
$$+240y^2 - 720y + 480$$
$$+192y - 288$$
$$+64$$

292. $$^nN = y^5 - 6y^4 + 2y^3 + 51y^2 - 117y + 81 = y^5 + 4y^4 - 6y^3 - y^2 - y + 3;$$
$$+10y^4 - 48y^3 + 12y^2 + 204y - 234$$
$$+40y^3 - 144y^2 + 24y + 204$$
$$+80y^2 - 192y + 16$$
$$+80y - 96$$
$$+32$$

III. Maintenant il y a à diviser ^mU par ^nN. Mais pour éviter les fractions, supposons $y = 3z$ (287.). Cela donne

293. $$\begin{cases} ^mU = 5 - 3z + 99z^2 - 54z^3 + 729z^5 + 729z^6, \\ ^nN = 3(1 - z - 3z^2 - 54z^3 + 108z^4 + 81z^5), \end{cases}$$

et on trouve

$$\text{Quot.} = 5 + 2z + 116z^2 + 338z^3 + 254z^4,$$

294.
$$\begin{array}{l|l}
1 - z - 3z^3 - 54z^5 & \\
+108z^4 + 81z^5 & 5 - 3z + 99z^2 - 54z^3 + 0\,z^4 + 729z^5 + \\
 & -5 + 5z + 15z^2 + 270z^3 - 540z^4 - 405z^5 \\
\hline
 & +2z + 114z^2 + 216z^3 - 540z^4 + 324z^5 + 729z^6 \\
 & -2z + 2z^2 + 6z^3 + 108z^4 - 216z^5 - 162z^6 \\
\hline
 & +116z^2 + 222z^3 - 432z^4 + 108z^5 + 567z^6 \\
 & -116z^2 + 116z^3 + 348z^4 + 6264z^5 - 12528z^6 - 9396z^7 \\
\hline
 & 338z^3 - 84z^4 + 6372z^5 - 11961z^6 - 9396z^7 \\
 & -338z^3 + 338z^4 + 1014z^5 + 18252z^6 - 36504z^7 - 27378z^8 \\
\hline
 & +254z^4 + 7386z^5 + 6291z^6 - 45900z^7 - 27378z^8 \\
 & -254z^4 + 254z^5 + 762z^6 + 13716z^7 - 27432z^8 - 20574z^9 \\
\hline
 & 7640z^5 + 7053z^6 - 32184z^7 - 54810z^8 - 20574z^9.
\end{array}$$

donc

295. $$\frac{^mU}{^nN} = \frac{5}{3} + \frac{2z}{3} + \frac{116z^2}{3} + \frac{338z^3}{3} + \frac{254z^4}{3} + \frac{(7640 + 7053z - 32184z^2 - 54810z^3 - 20574z^4)z^5}{^nN}.$$

IV. Puisque $z = \frac{y}{3}$ on a

296. $$\frac{^mU}{^nN} = \frac{5}{3} + \frac{2y}{9} + \frac{116y^2}{27} + \frac{338y^3}{81} + \frac{254y^4}{243} + \frac{(7640 + 2351y - 3576y^2 - 2030y^3 - 254y^4)y^5}{243 \cdot ^nN},$$

Digitized by Google

donc la valeur de la fraction proposée est

297. $$\frac{{}^{m}U}{y^{e}\cdot{}^{s}N} = \frac{5}{3y^{5}} + \frac{2}{9y^{4}} + \frac{116}{27y^{3}} + \frac{338}{81y^{2}} + \frac{254}{243y} + \frac{7640+2351y-3576y^{2}-2030y^{3}-254y^{4}}{243\cdot{}^{s}N}.$$

En remettant la valeur $x-2$ de y on trouve

298. $$\frac{{}^{m}U}{y^{e}\cdot{}^{s}N} = \frac{x^{6}-9x^{5}+30x^{4}-42x^{3}+23x^{2}-21x+35}{(x-2)^{5}(x^{4}-6x^{3}+2x^{2}+51x^{2}-117x+81)}$$

$$= \frac{5}{3(x-2)^{5}} + \frac{2}{9(x-2)^{4}} + \frac{116}{27(x-2)^{3}} + \frac{338}{81(x-2)^{2}} + \frac{254}{243(x-2)}$$

$$+ \frac{-254x^{3}+2x^{2}+2508x^{2}+423x+810}{243(x^{4}-6x^{3}+2x^{2}+51x^{2}-117x+81)},$$

comme il a été trouvé (85.).

V. Nous ne nous arrêterons pas à appliquer la sixième méthode à notre second exemple (63.). On voit bien que le calcul suivant cette méthode est encore assez fatigant, a cause de la recherche du multiplicateur M, et de la transformation de U et N en polynomes en y et de Z en un polynome en x.

§. VII. Septième méthode, celle de Mr. Clausen.

30.

Nous ne réproduirons pas ici l'analyse de cette méthode, parcequ'on peut la voir dans ce journal même, tome 8., cahier 2. pag. 142—145.

Cette méthode est sans doute différente de toutes les autres, et participe des avantages des deux précédentes, d'eviter le calcul des facteurs simples du dénominateur de la fraction proposée, et par conséquent celui des imaginaires qui y peuvent se présenter. Il y a seulement à remarquer qu'elle exigera encore des calculs fatigants dans la pratique. En effet, si l'on designe par ν le degré du dénominateur de la fraction proposée, on trouvera par les formules de l'auteur que la quantité indéterminée Z, qui se présente dans les résultats finals (11. pag. 144.) et qui, en vertu des équations (5. pag. 143.) n'est autre chose que celle qui y est exprimée par $\frac{P_n}{Q_n}$, sera généralement du degré $\nu-2$. Mais la résolution des équations finales (11.), c'est-à-dire le calcul des numérateurs P et P_1 cherchés des deux fractions partielles, s'exécutera en supposant *indéterminés* les coefficiens du polynome P_n, dont le nombre est $\nu-1$, et en cherchant ces $\nu-1$ coefficiens, ce qui se fera en supposant égaux à zéro un à un les coefficiens des $\nu-1$ premier termes de l'une ou de l'autre des deux équations (11.). Donc cette méthode exige d'abord le calcul au moins d'un des

Digitized by Google

deux polynomes r et r_1 suivant les formules (2. et 7.) et le calcul de la constante Q_n suivant les formules (2.) et après le calcul de $\nu-1$ *coefficiens indéterminés*, tirés d'autant d'équations du premier degré. Elle exige donc environs autant de calculs que la méthode ordinaire des coefficiens indéterminés (§. I.). Nous nous abstiendront par cette raison de l'appliquer à nos exemples et nous passerons à une dernière méthode qui, dans la pratique, sera plus expéditive que les autres.

§. VIII. Huitième méthode.

31.

I. En multipliant par ${}^{r}\gamma^{\varepsilon}.{}^{\varepsilon}N$ l'expression fondamentale (5.) on en tire

$$299. \quad {}^{m}U = {}^{r-1}w_1.{}^{\varepsilon}N + {}^{n-r-1}Z_1.{}^{r}\gamma,$$

et de là

$$300. \quad \frac{{}^{m}U - {}^{r-1}w_1.{}^{\varepsilon}N}{{}^{r}\gamma} = {}^{n-r-1}Z_1$$

II. Puisqu'il a été demontré que la décomposition de la fraction proposée suivant la formule (5.) est toujours possible, c'est-à-dire qu'il existe toujours deux polynomes entiers w et Z de degrés $r-1$ et $n-r-1$ tout au plus, qui satisfont à l'équation (5.) ou bien à celle (300.), on est en droit de conclure de l'équation (300.) que ${}^{m}U - {}^{r-1}w_1.{}^{\varepsilon}N$ sera nécessairement *divisible* par ${}^{r}\gamma$, c'est-à-dire que, si l'on exécute effectivement la division de ${}^{m}U - {}^{r-1}w.{}^{\varepsilon}N$ par ${}^{r}\gamma$, le *reste*, qui se présente, *sera nécessairement zéro*. Donc si l'on écrit

$$301. \quad {}^{m}U - {}^{r-1}w_1.{}^{\varepsilon}N = {}^{n-r-1}Z_1.{}^{r}\gamma + {}^{r-1}R_1,$$

on aura nécessairement

$$302. \quad {}^{r-1}R_1 = 0.$$

III. Cette remarque offre immédiatement les moyens de trouver les numérateurs ${}^{r-1}w$ et ${}^{n-r-1}Z$ des fractions partielles cherchées, et de consommer ainsi la décomposition de la fraction proposée.

En effet le degré du numérateur ${}^{r-1}w$ de la première fraction partielle (5.) ne peut être plus fort que $r-1$, comme il a été démontré (Sect. I.); donc, en supposant

$$303. \quad {}^{r-1}w = a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + a_3 x^{r-3} \ldots + a_r$$

le nombre des coefficiens a, indépendants de x, et contenus dans ${}^{r-1}w$, ne peut être plus grand que r.

Ces coefficiens, considérés comme autant d'inconnues, se présenteront aussi bien dans le *reste* R_1 que dans le *quotient* Z de la division

Digitized by Google

de $U - wN$ par y. Mais le *reste* R, comme venant du diviseur y, qui est du degré r, ne peut être également d'un degré supérieur à $r-1$; donc il aura également r coefficiens différents. Ces r coefficiens, qui impliqueront les r inconnues a, doivent être égalés séparement à zéro, R_1 lui même devant être $= 0$. Donc l'équation $R_1 = 0$ (302.), qui aura nécessairement lieu, suffira toujours à déterminer les valeurs des r coefficiens inconnus de ${}^{r-1}w$. Et après avoir encore donné à ces coefficiens leurs valeurs, partout où ils se trouvent dans Z, on aura aussi le quotient ${}^{n-r-1}Z$.

IV. Il n'y a même pas à craindre que parmi les r équations déterminantes, que fournit l'équation ${}^{r-1}R = 0$, il s'en trouve *d'identiques*. Car si cela étoit, il seroit impossible de trouver complétement w et Z, ce qui n'est pas, la décomposition (5.) étant toujours *possible*.

V. Ayant trouvé w_1 et Z_1, il n'y a qu'à écrire Z à la place de U et à répéter sur Z l'opération qu'on vient de faire sur U (6.). On aura, en vertu de (301.),

$$304. \quad {}^{n-r-1}Z_1 - {}^{r-1}w_1 \cdot {}^{s}N = {}^{n-2r-1}Z_2 \cdot {}^{r}y + {}^{r-1}R_2$$

et

$$305. \quad {}^{r-1}R_2 = 0.$$

L'équation (305.) donnera, comme ci-dessus, les valeurs des r coefficiens inconnus de w_2, et en substituant ces valeurs des coefficiens dans Z_2, on aura aussi le quotient ${}^{n-2r-1}Z$.

VI. En continuant cette opération, on trouvera successivement les numérateurs w_1, w_2, w_3, ... w_ϱ de toutes les fractions partielles qui précédent la dernière, et enfin aussi, en même tems, le numérateur ${}^{0}Z_\varrho$ de la *dernière* fraction partielle (8.) ce numérateur étant le *quotient* de la dernière division à faire.

VII. Puisque la *forme* des différents numérateurs w est toujours la même, savoir celle (303.), tous les produits $w_1 N$, $w_2 N$, $w_3 N$, ... auront aussi toujours la même forme, et cette remarque offre un moyen d'abréger encore le calcul. En effet, les résultats de la division de la *partie* $w_\mu N$ par y dans l'expression générale des formules (301., 304.)

$$306. \quad Z_{\mu-s} - w_\mu N = Z_\mu y + R_\mu$$

étant toujours les mêmes, il n'est pas nécessaire de diviser toujours de nouveau les quantités $Z_{\mu-1} - w_\mu N$, mais seulement la partie $Z_{\mu-1}$ de ces quantités, et une seule division de $w_\mu N$, une fois pour toutes, suffit. Les calculs seront simplifiés par là.

Digitized by Google

VIII. Supposant

307. $Z_{\mu-1} = P_{\mu-1}\,{}^{r}y + {}^{r-1}K_{\mu-1}$ et

308. $w_\mu N = G\,{}^{r}y + {}^{r-1}H,$

on aura

309. $Z_{\mu-1} - w_\mu N = (P_\mu - G)\,{}^{r}y + {}^{r-1}K_\mu - {}^{r-1}H.$

L'équation

310. ${}^{r-1}K_{\mu-1} - {}^{r-1}H = 0,$ ou bien ${}^{r-1}K_{\mu-1} = {}^{r-1}H,$

donnera les coefficiens inconnus de w_μ et après l'équation

311. $P_{\mu-1} - G = Z_\mu,$

donnera Z_μ. Les parties G et H dans ces équations seront toujours les mêmes.

IX. Voici le tableau des équations à calculer. Supposant

312. ${}^{r-1}w\,{}^{s}N = {}^{s-1}G\,{}^{r}y + {}^{r-1}H,$ où ${}^{r-1}w = a_1 x^{r-1} + a_2 x^{r-2} + a_3 x^{r-3}, \ldots, + a_r,$

et

313.
$$\begin{cases} {}^{m}U = {}^{m-r}P_0 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_0, \\ {}^{m-r-1}Z_1 = {}^{m-2r-1}P_1 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_1, \\ {}^{m-2r-1}Z_2 = {}^{m-3r-1}P_2 \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{m-(\mu-1)r-1}Z_{\mu-1} = {}^{m-\mu r-1}P_{\mu-1} \,.\, {}^{r}y + {}^{r-1}K_{\mu-1}: \end{cases}$$

les équations

314. ${}^{r-1}K_0 = {}^{r-1}H,\ {}^{r-1}K_1 = {}^{r-1}H,\ {}^{r-1}K_2 = {}^{r-1}H, \ldots, {}^{r-1}K_{\varrho-1} = {}^{r-1}H,$

donneront successivement les coefficiens inconnus de $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$, et les équations

315. $Z_1 = {}^{m-r}P_0 - {}^{s-1}G,\ Z_2 = {}^{m-2r-1}P_1 - {}^{s-1}G,\ Z_3 = {}^{m-3r-1}P_2 - {}^{s-1}G, \ldots$

$$\ldots\ Z_\varrho = {}^{s-1}P - {}^{s-1}G,$$

donneront successivement $Z_1, Z_2, \ldots Z_\varrho$.

X. Si ${}^{r}y$ est du degré 1, c'est-à-dire si $r = 1$: toutes les quantités w, H, K_0, K_1, K_2, $\ldots K_{\varrho-1}$ sont de degré 0, ou indépendantes de x. Donc les équations (314.) donnent immédiatement $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$ sans aucun procédé d'élimination. Mais si $r > 1$, le calcul des coefficiens inconnus de $w_1, w_2, w_3, \ldots w_\varrho$ exige l'élimination entre r équations de premier degré. Cette élimination ne sera pas généralement trop fatigante, le degré r de y, et par suite le nombre des inconnues et des équations, n'étant pas ordinairement bien fort. D'ailleurs cette élimination, au moins dans le cas où r n'est pas un trop grand nombre, pourra s'exécuter suivant les formules générales connues.

XI. Comme la huitième méthode de décomposition des fractions algébriques rationnelles que nous venons de présenter n'exige pas des

Digitized by Google

transformations des polynomes donnés en x en d'autres en y, et réciproquement, ni le calcul du multiplicateur M propre à réduire la fraction $\frac{{}^mU}{{}^nN}$ à la forme $\frac{Py+K}{Qy+{}^oC}$, cette méthode sera ordinairement plus prompte et plus expéditive que les autres et par conséquent préférable. Et comme encore l'idée fondamentale représentée par l'équation (301.), sur laquelle elle est basée, est très simple et facile à retenir, la même méthode parait aussi être par préférence recommendable aux élémens.

32.

Appliquons la d'abord à notre *premier* exemple (59.).

I. Ici on a

316. $w=\alpha,\quad y=x-2,$

et si l'on divise $w.{}^nN$ (58.) et ${}^mU$ (56.) par y, on trouve

317. $w.{}^nN=\alpha(x^4-4x^3-6x^2+39x-39)(x-2)+3\alpha,$

318. ${}^mU=(x^5-7x^4+16x^2-10x^2+3x-15)(x-2)+5,$

donc (312. et 313.)

319. $H=3\alpha,\quad K_0=5$

et suivant (314.) $s=3\alpha$, donc

320. $\alpha=w_1-\frac{5}{3}$

et suivant (315.) en substituant la valeur trouvée de α dans (312.),

$Z_1=x^5-7x^4+16x^3-10x^2+3x-15-\frac{5}{3}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39),$

321. $Z_1=\frac{1}{3}(3x^5-26x^4+68x^3-185x+150).$

II. En divisant de nouveau Z_1 par y on a

322. $Z_1=\frac{1}{3}((3x^4-20x^3+28x^2+56x-74)(x-2)+2),$

donc (312., 313., 314.)

$H=3\alpha,\quad K_1=\frac{2}{3}$ et

323. $\alpha=w_2=\frac{2}{9}$

et suivant (313.)

$Z_2=\frac{1}{3}(3x^4-20x^3+28x^2+56x-74)-\frac{2}{9}(x^4-4x^3-6x^2+39x-39),$

324. $Z_2=\frac{1}{9}(7x^4-52x^3+96x^2+90x-144).$

III. En divisant Z_2 par y on a

325. $Z_2=\frac{1}{9}((7x^3-38x^2+20x+130)(x-2)+116),$

donc (312.—14.)

$H=3\alpha,\quad K_2=\frac{116}{9}$ et

326. $\alpha=w_3=\frac{116}{243}$

et suivant (313.)

Digitized by Google

$$Z_3 = \tfrac{1}{9}(7x^3 - 38x^2 + 20x + 130) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}\tfrac{6}{}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

327. $Z_3 = + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}(-116x^4 + 485x^3 + 582x^2 - 4464x + 4134)$.

IV. En divisant Z_3 par y on a

328. $Z_3 = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}((-116x^3 + 253x^2 + 1088x - 2248)(x-2) + 338)$,

donc (312. — 14.)

$$H = 3\alpha, \quad K_3 = \tfrac{3}{2}\tfrac{3}{7}\tfrac{6}{} \text{ et}$$

329. $\alpha = w_4 = \tfrac{3}{9}\tfrac{3}{1}\tfrac{8}{}$

et suivant (313.)

$$Z_4 = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{7}(-116x^3 + 253x^2 + 1088x - 2288) - \tfrac{3}{9}\tfrac{3}{1}\tfrac{8}{}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

330. $Z_4 = \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{1}(-338x^4 + 1004x^3 + 2787x^2 - 9918x + 6318)$.

V. Divisant enfin Z_4 par y on a

331. $Z_4 = \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{1}((-338x + 328x^2 + 3443x - 3032)(x-2) + 254)$,

donc (312. — 14.)

$$H = 3\alpha, \quad K_4 = \tfrac{2}{9}\tfrac{5}{1}\tfrac{4}{} \text{ et}$$

332. $\alpha = w_5 = \tfrac{2}{2}\tfrac{5}{4}\tfrac{4}{3}$

et suivant (313.)

$$Z_5 = \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{1}(-338x^3 + 328x^2 + 3443x - 3032) - \tfrac{2}{2}\tfrac{5}{4}\tfrac{4}{3}(x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 39x - 39),$$

333. $Z_5 = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\tfrac{3}{}(-254x^4 + 2x^3 + 2508x^2 + 423x + 810)$.

VI. Les résultats (320., 323., 326., 329., 332. et 333.) étant substitués dans (8.), on a

334.
$$\frac{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 42x^3 + 23x^2 - 21x + 35}{(x-2)^6(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)}$$
$$= \frac{5}{3(x-2)^6} + \frac{2}{9(x-2)^4} + \frac{116}{27(x-2)^3} + \frac{338}{81(x-2)^2} + \frac{254}{243(x-2)}$$
$$+ \frac{-254x^4 + 2x^3 + 2508x^2 + 423x + 810}{243(x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 51x^2 - 117x + 81)},$$

comme il a été trouvé (85.).

33.

Appliquons aussi la huitième méthode de décomposition au *second* exemple (63.).

1. Ici on a

335. $w = \alpha_1 x + \alpha_2, \quad y = x^2 - 2x + 5,$

336. $w^s N = \alpha_1 x^6 + (3\alpha_1 + \alpha_2)x^5 + (4\alpha_1 + 3\alpha_2)x^4 + 4\alpha_2 x^3 - 2\alpha_1 x^2$
$$- (3\alpha_1 + 2\alpha_2)x - 3\alpha_2$$

et si l'on divise $w^s N$ (336.) et ${}^m U$ (60.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve (312. et 13.)

Digitized by Google

$$337.\quad \begin{cases} {}^{n-1}G = a_1x^3 + (3a_1+a_2)x^2 + (9a_1+5a_2)x^2 + (9a_1-7a_2)x - (61a_1+7a_2), \\ {}^{n-1}H = -(90a_1+41a_2)x + 305a_1 + 32a_2, \\ {}^{n-1}P = 17x^5 - 111x^4 + 124x^3 - 161x^2 - 408x^2 - 45x + 7, \\ {}^{n-2}K_0 = -183x + 96, \end{cases}$$

donc on a en vertu du l'équation ${}^{n-1}H = {}^{n-1}K_0$ (314.),

$$338.\quad -(90a_1+61a_2)x + 305a_1 + 32a_2 = -183x + 96,$$

donc

$$339.\quad \begin{cases} 90a_1+61a_2 = 183, \\ 305a_1+32a_2 = 96, \end{cases}$$

et de là on tire $a_2 = 3 - \frac{90}{61}a_1$, $a_2 = 3 - \frac{305}{32}a_1$, donc

$$340.\quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_2 = 3$$

et par suite

$$341.\quad w_1 = 3.$$

En mettant (340.) dans ${}^{n-1}G$ (337.) on trouve

$$342.\quad {}^{n-1}G = 3x^3 + 15x^2 + 27x - 21,$$

donc suivant (315., 337. et 342.)

$$343.\quad Z_1 = 17x^5 - 111x^4 + 124x^3 - 164x^2 - 423x^2 - 72x + 28.$$

II. En divisant Z_1 (343.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve (313.)

$$344.\quad \begin{cases} {}^{n-2}{}^{n-1}P_1 = 17x^3 - 77x^2 - 115x^2 - 9x + 134, \\ {}^{n-1}K_1 = +241x - 642, \end{cases}$$

donc l'équation ${}^{n-1}K_1 = {}^{n-1}H$ (314.) donne en vertu de (344. et 337.)

$$345.\quad -(90a_1+61a_2)x + 305a_1 + 32a_2 = 241x - 642,$$

et l'équation (345.) donne

$$346.\quad \begin{cases} 90a_1+61a_2 = -241, \\ 305a_1+32a_2 = -642, \end{cases}$$

De là on tire $(90.32 - 61.305)a_1 = -(32.241 - 61.642)$ c'est-à-dire $-15725a_1 = 31450$, donc

$$347.\quad a_1 = -2$$

et substituant dans (346.) $-180 + 61a_2 = -241$, donc

$$348.\quad a_2 = -1$$

et par suite

$$349.\quad w_2 = -2x - 1.$$

En mettant les valeurs de a_1 et a_2 dans ${}^{n-1}G$ (337.) on trouve

$$350.\quad {}^{n-1}G = -2x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 5x + 129,$$

donc suivant (315., 344. et 350.)

$$351.\quad Z_2 = 19x^4 - 66x^3 - 92x^2 - 14x + 5.$$

Digitized by Google

III. En divisant Z_1 (351.) par $y = x^2 - 2x + 5$ on trouve

$$352. \quad \begin{cases} {}^{n-3r-1}P_2 = 19x^2 - 28x - 243, \\ {}^{r-1}K_2 = -360x + 1220, \end{cases}$$

donc l'équation ${}^{r-1}K_2 = {}^{r-1}H$ (314.) donne, en vertu de (337. et 352.),

$$353. \quad -(90\alpha_1 + 61\alpha_2)x + 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = -360x + 1220$$

et l'équation (353.) donne

$$354. \quad \begin{cases} 90\alpha_1 + 61\alpha_2 = 360, \\ 305\alpha_1 + 32\alpha_2 = 1220. \end{cases}$$

De là on tire $\alpha_1 = 4 - \frac{61}{90}\alpha_2$ et $\alpha_1 = 4 - \frac{32}{305}\alpha_2$, donc

$$355. \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 4$$

et par suite

$$356. \quad w_3 = +4x.$$

En mettant les valeurs de α_1 et α_2 dans ${}^{r-1}G$ (337.) on trouve

$$357. \quad {}^{r-1}G = 4x^4 + 20x^3 + 36x^2 - 28x - 244,$$

donc suivant (315., 352. et 357.)

$$358. \quad Z_3 = -4x^4 - 20x^3 - 17x^2 + 1.$$

IV. Les résultats (341., 349., 356. et 358.) étant substitués dans (8.) on a

$$359. \quad \frac{17x^9 - 145x^7 + 431x^6 - 964x^5 + 534x^4 - 34x^3 - 1943x^2 - 422x + 131}{(x^2 - 2x + 5)^3 (x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 2x - 3)}$$

$$= \frac{3}{(x^2 - 2x + 5)^3} - \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 5)^2} + \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{4x^6 + 20x^5 + 17x^3 - 1}{x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x - 3}.$$

C'est le développement complet de la fraction proposée (63.) en fractions partielles.

34.

Nous terminerons ici le présent mémoire pour ne pas trop le grossir. Nous laisserons à l'avenir les nombreuses applications dans l'analyse qui pourront encore être faites des résultats de la décompositon des fractions et des calculs et transformations qui s'y présentent. La première application des *résultats* qui se présentera sera celle à l'intégration des différentielles rationnelles mais fractionnaires, où il y aura encore plusieurs choses à dire. Mais les *calculs* et les *transformations*, dont on a fait usage ici, pourront encore être utiles en d'autres parties de l'analyse, par ex. dans la théorie du plus grand commun diviseur, dans celle de l'élimination etc. Il se pourra même qu'elles soient utiles dans la théorie des nombres, en mettant des *polynomes* à la places des *nombres entiers*. La décomposition

Digitized by Google

d'un polynome dans la somme d'un produit d'un diviseur donné et du quotient, et d'un reste qui s'est présentée dans le cours des calculs précédents a une analogie complète avec cette décomposition des nombres entiers laquelle donne naissance aux *congruences*; même l'équation (192.) par ex. qui s'est présentée ci-dessus dans la recherche du *multiplicateur* propre à transformer une fraction donnée en une autre dont le dénominateur est de la forme $Qy + {}^{\circ}C$, y étant un polynome donné et ${}^{\circ}C$ indépendant de x, est, quant à la forme, toute semblable à une *congruence de premier degré* en nombres entiers, et même la résolution de cette équation par développement en fraction continue a une analogie complète avec celles des congruences du premier degré en nombres entiers. Il se pourrait bien que plusieurs autres analogies encore se présentassent, en opérant sur les polynomes comme on le fait sur les nombres entiers. Les polynomes qui n'ont pas des diviseurs communs prendroient la place des nombres *premiers rélatifs*; les polynomes du premier degré celle des *nombres premiers absolus etc.* Nous laissons tout cela à l'avenir, en recommandant ces observations à l'attention des géomètres.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

DEC 29 1937

Digitized by Google

Digitized by Google